

---

## Examen Terminal

Le 12/04/2010 à 10h30

Durée : 2 heures

---

**Exercice 1.** On se donne  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a < b$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(c, d) \in [a, b]^2$  avec  $c < d$ . Etablir l'inégalité

$$\left| \int_c^d \sin(nt) dt \right| \leq \frac{2}{n}.$$

On a

$$\begin{aligned} \left| \int_c^d \sin(nt) dt \right| &= \left| \left[ -\frac{1}{n} \cos(nt) \right]_c^d \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} [\cos(nc) - \cos(nd)] \right| \leq \frac{1}{n} |\cos(nc)| + |\cos(nd)| \leq \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

2. Soit  $f$  une fonction étagée (ou en escalier) sur  $[a, b]$ . Prouver que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0.$$

Par définition de "f étagée", il existe une subdivision  $\{x_0, \dots, x_N\}$  de l'intervalle  $[a, b]$  telle que la fonction  $f$  soit constante sur chaque sous-intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ . Par conséquent

$$\int_a^b f(t) \sin(nt) dt = \sum_{i=0}^{N-1} K_i^n, \quad K_i^n := \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t) \sin(nt) dt.$$

D'après la question 1., chaque suite  $\{K_i^n\}_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . La somme étant finie, on obtient le résultat.

**Exercice 2.**

1. Trouver une fonction  $f : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et telle que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} e^{-\frac{n}{k}}.$$

Il suffit de prendre  $f(t) = \frac{1}{t^2} e^{-1/t}$ .

2. Montrer que  $f$  se prolonge par continuité en  $t = 0$ .

On a

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s^2 e^{-s} = 0$$

d'après un résultat du cours sur les croissances comparées des fonctions puissances et exponentielles. Il suffit de poser  $f(0) = 0$  pour prolonger  $f$  par continuité.

3. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} e^{-\frac{n}{k}}.$$

*Il s'agit de reconnaître ici une somme de Riemann (cours) pour obtenir*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} e^{-\frac{n}{k}} = \int_0^1 f(t) dt = [e^{-1/t}]_0^1 = \frac{1}{e}.$$

**Exercice 3.**

1. A l'aide du Théorème des accroissements finis, montrer que

$$|\sin t| \leq |t|, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

*On a*

$$|\sin t - \sin 0| = |(\sin' c_t)(t - 0)| = |\cos c_t| |t| \leq |t|, \quad c_t \in [0, T].$$

2. En déduire la nature de l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$

3. A l'aide d'un changement de variables, établir l'identité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt = 2 \int_0^1 \frac{\sin t}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$

T.S.V.P.  $\longrightarrow$

## Problème

On note  $\mathbb{R}_+^* := ]0, +\infty[$  et  $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty[$ . Ce sujet porte sur l'étude de l'application

$$f : [1, +\infty[ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \longmapsto f(x, t) = t \ln t e^{-xt}.$$

Le réel  $x \in [1, +\infty[$  étant fixé, on considère la fonction :

$$f_x : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto f_x(t) := f(x, t) = t \ln t e^{-xt}.$$

L'objectif est d'étudier pour différentes valeurs de  $x$  les propriétés de  $f_x$  et de ses intégrales.

**Partie A.** On prend  $x = 1$ .

1. Expliquer pourquoi la fonction  $f_1$  est localement intégrable sur  $]0, +\infty[$ .
2. Prouver que la fonction  $t \longmapsto (1 + t^2) f_1(t)$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+$ .
3. A l'aide de ce qui précède, montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} f_1(t) dt = \int_0^{+\infty} t \ln t e^{-t} dt$$

est convergente. On note  $I \in \mathbb{R}$  sa valeur.

4. Etablir l'encadrement :  $-1/4 \leq I \leq 1/e$ .

**Partie B.** On prend  $x = n$  avec  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Quelle est la limite simple sur  $]0, +\infty[$  de la suite  $\{f_n\}$  ?
2. Justifier le résultat asymptotique suivant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 0.$$

**Partie C.** On fait varier  $x$  dans  $]1, +\infty[$ .

1. Quelle est la dérivé partielle de  $f$  par rapport à  $x$  ?
2. Identifier une fonction  $g$  intégrable sur  $]0, +\infty[$  vérifiant

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq g(t), \quad \forall (x, t) \in ]1, +\infty[ \times [0, +\infty[.$$

3. Rappeler les hypothèses du Théorème de dérivabilité sous le signe somme puis en déduire que la fonction

$$F : ]1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto F(x) := \int_0^{+\infty} t \ln t e^{-xt} dt$$

est de classe  $C^1$ .

4. Ecrire  $F'(x)$  sous la forme d'une intégrale généralisée.
5. Etablir l'identité fonctionnelle

$$x^3 F'(x) + 2 x^2 F(x) + 1 = 0, \quad \forall x \in ]1, +\infty[.$$

6. Exprimer la valeur de  $F(x)$  en fonction de  $F(1)$  et de fonctions usuelles.