Université Rennes I Année 2009-2010
MIEE-S4MMAN4UT **AN4**

Examen Terminal

Le 12/04/2010 à 10h30
Durée : 2 heures

Exercice 1. On se donne $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(c,d) \in [a,b]^2$ avec $c < d$. Etablir l'inégalité

$$\Big| \int_c^d \sin(n\,t)\ dt \Big| \ \leqslant\ \frac{2}{n}\,.$$

2. Soit f une fonction étagée (ou en escalier) sur $[a,b]$. Prouver que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \quad \int_a^b f(t)\ \sin(n\,t)\ dt\ =\ 0\,.$$

Exercice 2.

1. Trouver une fonction $f\ :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que

$$\frac{1}{n}\ \sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big)\ =\ n\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\ e^{-\frac{n}{k}}\,.$$

2. Montrer que f se prolonge par continuité en $t = 0$.
3. Calculer

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \quad n\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\ e^{-\frac{n}{k}}\,.$$

Exercice 3.

1. A l'aide du Théorème des accroissements finis, montrer que

$$|\sin t|\ \leqslant\ |t|\,, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

2. En déduire la nature de l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\ t}{t}\ \sin\big(\frac{1}{t}\big)\ dt\,.$$

3. A l'aide d'un changement de variables, établir l'identité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\ t}{t}\ \sin\big(\frac{1}{t}\big)\ dt\ =\ 2\ \int_0^{1} \frac{\sin\ t}{t}\ \sin\big(\frac{1}{t}\big)\ dt\,.$$

T.S.V.P. $\longrightarrow$

Problème

On note $\mathbb{R}_+^* :=]0,+\infty[$ et $\mathbb{R}_+ := [0,+\infty[$. Ce sujet porte sur l'étude de l'application

$$\begin{array}{rccl} f \; : & [1,+\infty[\times\mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \,=\, t\,\ln t\; e^{-x\,t}\,. \end{array}$$

Le réel $x \in [1,+\infty[$ étant fixé, on considère la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f_x \; : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f_x(t) \,:=\, f(x,t) = \, t\,\ln t\; e^{-x\,t}\,. \end{array}$$

L'objectif est d'étudier pour différentes valeurs de x les propriétés de f_x et de ses intégrales.

Partie A. *On prend $x = 1$.*

1. Expliquer pourquoi la fonction f_1 est localement intégrable sur $]0,+\infty[$.
2. Prouver que la fonction $t \longmapsto (1+t^2)\, f_1(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
3. A l'aide de ce qui précède, montrer que l'intégrale généralisée
$$\int_0^{+\infty} f_1(t)\; dt \;=\; \int_0^{+\infty} t\;\ln t\; e^{-t}\; dt$$
est convergente. On note $I \in \mathbb{R}$ sa valeur.
4. Etablir l'encadrement : $-1/4 \leqslant I \leqslant 1/e$.

Partie B. *On prend $x = n$ avec $n \in \mathbb{N}$.*

1. Quelle est la limite simple sur $]0,+\infty[$ de la suite $\{f_n\}$?
2. Justifier le résultat asymptotique suivant
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\; dt \;=\; 0\,.$$

Partie C. *On fait varier x dans* $]1,+\infty[$.

1. Quelle est la dérivé partielle de f par rapport à x ?
2. Identifier une fonction g intégrable sur $]0,+\infty[$ vérifiant
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \;\leqslant\; g(t)\,, \qquad \forall\,(x,t) \in]1,+\infty[\times[0,+\infty[\,.$$
3. Rappeler les hypothèses du Théorème de dérivabilité sous le signe somme puis en déduire que la fonction
$$\begin{array}{rccl} F \; : &]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & F(x) \,:=\, \displaystyle\int_0^{+\infty} t\;\ln t\; e^{-x\,t}\; dt \end{array}$$
est de classe C^1.
4. Ecrire $F'(x)$ sous la forme d'une intégrale généralisée.
5. Etablir l'identité fonctionnelle
$$x^3\; F'(x) \;+\; 2\;x^2\; F(x) \;+\; 1 \;=\; 0\,, \qquad \forall\, x \in]1,+\infty[\,.$$
6. Exprimer la valeur de $F(x)$ en fonction de $F(1)$ et de fonctions usuelles.