Unité d'enseignement AN4

Examen Terminal du 4 mai 2016

Vous disposez de **2h** pour répondre aux questions des exercices suivants.
Les documents et calculatrices sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Le sujet comporte 5 exercices indépendants et est imprimé recto-verso.

Exercice 1

1) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction.
   (a) Soit $\sigma : x_0 = a < x_1 < \ldots < x_N = b$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Définir les sommes de Darboux $D_+(f, \sigma)$ et $D_-(f, \sigma)$, associées à σ et à la fonction f.
   (b) Que doit vérifier f pour garantir l'existence de ces sommes de Darboux.
   (c) Que veut dire dans ce cas que f est Riemann-intégrable ?
   (d) Prouvez que ces conditions sont satisfaites si f est monotone sur $[a, b]$.
2) Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable et $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\, dt$.
   Répondre par "Vrai" ou par "Faux", sans justification, aux affirmations suivantes :
   (a) F est continue.
   (b) Pour tout $x \in [-1, 1]$, $F'(x) = f(x)$.
   (c) Si pour tout $x \in [-1, 1]$, $f(x) \leq x^5$, alors F est négative ou nulle.

Exercice 2

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{(-1)^k}{k} & \text{si } x \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right] \end{cases}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions g_n et h_n de $[0, 1] \to \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ f(x) & \text{si } x \in]\frac{1}{n}, 1] \end{cases} \text{ et } h_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ f(x) & \text{si } x \in]\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

1. Expliquer pourquoi g_n et h_n sont des fonctions en escalier (étagées).
   La fonction f est-elle en escalier ?
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (h_n(x) - g_n(x))\, dx$.
3. La fonction f est-elle Riemann-intégrable sur $[0, 1]$?

Exercice 3

1) Soit $a < b$ deux nombres réels et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer

$$\left| \int_a^b \cos(nt)\, dt \right| \leq \frac{2}{n}.$$

2) Soit $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier (étagée) (associée à la subdivision $\sigma :\ x_0 = a < x_1 < \ldots < x_N = b$ de l'intervalle $[a, b]$.) Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \phi(t) \cos(nt)\, dt = 0.$$

3) Soient f, ϕ et ψ des fonctions de $[a, b] \to \mathbb{R}$ telles que $\phi \leq f \leq \psi$.
Montrer que pour tout $t \in [a, b]$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :
$\phi(t) \cos(nt) - (\psi(t) - \phi(t)) \leq f(t) \cos(nt) \leq \psi(t) \cos(nt) + (\psi(t) - \phi(t))$.

4) En déduire, en utilisant le 2) et 3), que pour toute fonction Riemann-intégrale $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t) \cos(nt)\, dt = 0.$$

Exercice 4

1) Déterminer pour quelles valeurs du réel α l'intégrale suivante est convergente

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^2)\, dx}{x^\alpha}.$$

2) Calculer $I(2)$.

Exercice 5

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t^2 + 1} dt$

1) Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2) Calculer $F(0)$ et $F(1)$.
3) Calculer la limite de F en $+\infty$.
4) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$ on a

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{2(x^2 u + 1)(u + 1)}.$$

5) Prouver que, pour tout $x > 0$ différent de 1, on a $F'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$.
6) Que vaut $F'(1)$?
7) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}\, dx$ converge et déterminer sa valeur.