Unité d'enseignement AN4

Examen Terminal du 4 mai 2016

Vous disposez de **2h** pour répondre aux questions des exercices suivants.
Les documents et calculatrices sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Le sujet comporte 5 exercices indépendants et est imprimé recto-verso.

Exercice 1

1) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction.
   (a) Soit $\sigma : x_0 = a < x_1 < \ldots < x_N = b$ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.
   Définir les sommes de Darboux $D_+(f,\sigma)$ et $D_-(f,\sigma)$, associées à σ et à la fonction f.
   Réponse : $D_+(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{N-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$ et $D_-(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{N-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$ où $M_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$ et $m_i = \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$.
   (b) Que doit vérifier f pour garantir l'existence de ces sommes de Darboux.
   Réponse : f doit être bornée.
   (c) Que veut dire dans ce cas que f est Riemann-intégrable ? **Réponse :** Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une subdivision σ de $[a,b]$ telle que $D_+(f,\sigma) - D_-(f,\sigma) < \epsilon$.
   (d) Prouver que ces conditions sont satisfaites si f est monotone sur $[a,b]$.
   Réponse : Supposons que f est croissante sur $[a,b]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et σ_n est la subdivision régulière d'ordre n de $[a,b]$, alors $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$, $M_i = f(x_{i+1})$ et $m_i = f(x_i)$ d'où $D_+(f,\sigma_n) - D_-(f,\sigma_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{N-1}(M_i - m_i) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \epsilon$ pour n assez grand.
   Pour f décroissante, on aura $D_+(f,\sigma_n) - D_-(f,\sigma_n) = \frac{b-a}{n}(f(a) - f(b))$ et la même conclusion.
2) Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable et $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$. Répondre par "Vrai" ou par "Faux", sans justification, aux affirmations suivantes :
   (a) F est continue. **Réponse :** Vrai :
   (b) Pour tout $x \in [-1,1]$, $F'(x) = f(x)$. **Réponse :** Faux (F n'est pas toujours dérivable)
   (c) Si pour tout $x \in [-1,1]$, $f(x) \leq x^5$, alors F est négative ou nulle. **Réponse :** Vrai

Exercice 2

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{(-1)^k}{k} & \text{si } x \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right] \end{cases}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions g_n et h_n de $[0,1] \to \mathbb{R}$ par :

$g_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ f(x) & \text{si } x \in]\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$ et $h_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ f(x) & \text{si } x \in]\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$

1. Expliquer pourquoi g_n et h_n sont des fonctions en escalier (étagées).
   Réponse : g_n et h_n sont constantes sur chaque intervalle de la subdivision finie de $[0,1]$ donnée par $a_0 = 0 < a_1 = \frac{1}{n} < a_2 = \frac{1}{n-1} < \cdots < a_n = 1$.
   La fonction f est-elle en escalier ?
   Réponse : Non, elle prend une infinité de valeurs, à savoir la suite $\frac{(-1)^k}{k}$, $k \in \mathbb{N}$.
2. **Réponse :** $\displaystyle\int_0^1 (h_n(x) - g_n(x))\, dx = \int_0^{\frac{1}{n}} (\frac{1}{n} - \frac{-1}{n})\ dx = \frac{2}{n}\int_0^{\frac{1}{n}} dx = \frac{2}{n^2}.$
3. La fonction f est-elle Riemann-intégrable sur $[0,1]$?
   Réponse : Oui, car il existe deux suites de fonctions en escalier (g_n) et (h_n) telles que $g_n \leq f \leq h_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 (h_n(x) - g_n(x))\, dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n^2} = 0.$

Exercice 3

1) Soit $a < b$ deux nombres réels et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer $\left|\int_a^b \cos(nt)\, dt\right| \leq \frac{2}{n}$.

   Réponse : $\displaystyle\left|\int_a^b \cos(nt)\, dt\right| = \left|\frac{\sin(nb) - \sin(na)}{n}\right| \leq \left|\frac{\sin(nb)}{n}\right| + \left|\frac{\sin(na)}{n}\right| \leq \frac{2}{n}.$

2) Soit $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier (étagée) (associée à la subdivision $\sigma :\ x_0 = a < \ldots < x_N = b$ de l'intervalle $[a,b]$.) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \phi(t)\cos(nt)\, dt = 0$.

   Réponse : Notons pas c_k est la valeur de ϕ sur $[x_k, x_{k+1}[$ alors
   $$\int_a^b \phi(t)\cos(nt)\, dt = \sum_{k=0}^{N-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} c_k \cos(nt)\ dt = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \cos(nt)\ dt,$$
   d'où $\displaystyle\left|\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \phi(t)\cos(nt)\, dt\right| \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{N-1}|c_k| = 0.$

3) Soient f, ϕ et ψ des fonctions de $[a,b] \to \mathbb{R}$ telles que $\phi \leq f \leq \psi$. Montrer que pour tout $t \in [a,b]$ et $n \in \mathbb{N}$ on a : $\phi(t)\cos(nt) - (\psi(t) - \phi(t)) \leq f(t)\cos(nt) \leq \psi(t)\cos(nt) + (\psi(t) - \phi(t))$.

   Réponse : On a $f(t)\cos(nt) - (\phi(t)\cos(nt) - (\psi(t) - \phi(t))) = (f(t) - \phi(t))\cos(nt) + (\psi(t) - \phi(t)) \geq (f(t) - \phi(t))\cos(nt) + (f(t) - \phi(t)) = (f(t) - \phi(t))(\cos(nt) + 1) \geq 0$ et
   $\psi(t)\cos(nt) + (\psi(t) - \phi(t)) - f(t)\cos(nt) = (\psi(t) - f(t))\cos(nt) + (\psi(t) - \phi(t)) \geq (\psi(t) - f(t))\cos(nt) + (\psi(t) - f(t)) = (\psi(t) - f(t))(\cos(nt) + 1) \geq 0$.

4) En déduire, en utilisant le 2) et 3), que pour toute fonction Riemann-intégrale $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt)\, dt = 0$.

   Réponse : Comme f est riemann-intégrable, pour tout $\epsilon >$ il existe deux fonctions en escalier ϕ et ψ telles que $\phi \leq f \leq \psi$ et $\displaystyle\int_a^b (\psi(t) - \phi(t))\ dt \leq \epsilon$. D'après 3) on aura
   $$\int_a^b \phi(t)\cos(nt)\, dx - \int_a^b (\psi(t) - \phi(t))\ dt \leq \int_a^b f(t)\cos(nt)\, dx \leq \int_a^b \psi(t)\cos(nt)\, dx + \int_a^b (\psi(t) - \phi(t))\ dt.$$
   En passant à la limite lorsque n tends vers $+\infty$ et en utilisant 2) on a :
   $$-\epsilon \leq \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt)\ dx \leq \epsilon,$$
   comme ϵ est arbitraire, ceci est équivalent à $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt)\ dx = 0.$

Exercice 4

1) Déterminer pour quelles valeurs du réel α l'intégrale suivante est convergente

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}\, dx.$$

Réponse : 1) $\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} \sim_0 \frac{1}{x^{\alpha-2}}$ converge si et seulement si $\alpha - 2 < 1$ ou encore $\alpha < 3$. Si $\alpha > 1$, $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{\alpha+1}{2}} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^{\frac{\alpha-1}{2}}} = 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}\, dx$ converge ; d'autre part si $\alpha \leq 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} \geq \int_1^{+\infty} \frac{\ln(2)}{x^\alpha} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(2)}{x^\alpha} dx = +\infty$.
Ainsi $I(\alpha)$ converge si et seulement si $1 < \alpha < 3$.

2) Calculer $I(2)$. **Réponse :** Une intégration par parties nous donne :
$I(2) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\, dx = \left[-\frac{\ln(1+x^2)}{x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 0 + 2\left[\arctan(x)\right]_0^{+\infty} = \pi$.

Exercice 5

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t^2+1} dt$

1) Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Réponse : La fonction $f : (x,\ t) \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{t^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. De plus, sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ on a $|f(x,\ t)| \leq \dfrac{\pi}{2(t^2+1)}$, et $t \mapsto \dfrac{\pi}{2(t^2+1)}$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$. D'après le théorème de continuité des fonctions définies par des intégrales, F est donc bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $F(0)$ et $F(1)$. **Réponse :** Comme $\arctan(0) = 0$ on a $F(0) = 0$ et
$F(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2+1} dt = \left[\frac{1}{2}(\arctan(t))^2\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}$.

3) Calculer la limite de F en $+\infty$. **Réponse :** On va appliquer le théorème de convergence dominée ; considérons une suite (x_n) qui tend vers $+\infty$. Alors $F(x_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$, où f_n est la fonction définie par $t \mapsto \dfrac{\arctan(x_n t)}{t^2+1}$. Pour $t > 0$ fixé, $\arctan(x_n t)$ converge vers $\dfrac{\pi}{2}$ quand n tend vers $+\infty$, donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $t \mapsto \dfrac{\pi}{2(t^2+1)}$ sur] $0, +\infty[$. De plus, $|f_n(t)| \leq \dfrac{\pi}{2(t^2+1)}$ pour tout n et tout $t > 0$, et on a vu que la fonction majorante est intégrable sur $]0, +\infty[$. Le théorème de convergence dominée permet d'affirmer que $F(x_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2(t^2+1)} dt = \frac{\pi^2}{4}$. Ceci est valable pour toute suite (x_n) tendant vers $+\infty$, on a donc montré que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi^2}{4}$.

4) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$ on a $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{2(x^2u+1)(u+1)}$.
Réponse : Pour tout $(x,\ t) \in \mathbb{R}^2$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ t) = \frac{t}{(x^2t^2+1)(t^2+1)}$; c'est une fonction continue des deux variables (x, t).
Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$. Sur $[a, b] \times]0, +\infty[$, on a $0 \leq \frac{\partial f}{\partial x}(x,\ t) \leq \frac{t}{(a^2t^2+1)(t^2+1)}$. Pour appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, il nous suffit donc de vérifier que, pour tout $a > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{(a^2t^2+1)(t^2+1)}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Cette fonction se

prolonge par continuité en 0, est à valeurs positives, et est équivalente en $+\infty$ à $\dfrac{t}{a^2t^4} = \dfrac{1}{a^2t^3}$, et par comparaison à une intégrale de Riemann, la fonction est bien intégrable sur $]0,+\infty[$. Ainsi, d'après théorème de dérivabilité sous le signe intégrale, F est de classe C^1 sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b],\ F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(x^2t^2+1)(t^2+1)}dt$. Ceci étant vrai pour tout intervalle $[a,b]$ contenu dans $]0,+\infty[$, c'est en fait vrai sur $]0,+\infty[$. Pour terminer en applique le changement de variables $u=t^2$, on obtient que, pour tout $x>0$, $F'(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{(x^2u+1)(u+1)}$.

5) Prouver que, pour tout $x>0$ différent de 1, on a $F'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$.

Réponse : Fixons un $x>0$ et différent de 1 ; alors la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(x^2u+1)(1+u)}$ peut s'écrire sous la forme $\frac{1}{(x^2u+1)(u+1)} = \frac{a}{u+1} + \frac{b}{x^2u+1}$. Pour calculer $a,\ b$: on multiplie par $u+1$ et on substitue $u=-1$, ce qui donne $a = \dfrac{1}{1-x^2}$; on multiplie par x^2u+1 et on substitue $u = -\dfrac{1}{x^2}$, obtient ainsi $b = \dfrac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = \dfrac{x^2}{x^2-1}$.

Ceci permet d'obtenir, pour tout $x>0$ et différent de 1, que

$$2F'(x) = \frac{1}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2u+1} - \frac{1}{u+1}\right)du = \frac{1}{x^2-1}\left[\ln(x^2u+1)-\ln(u+1)\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{x^2-1}\left[\ln\left(\frac{x^2u+1}{u+1}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x^2-1}\ln(x^2) = 2\frac{\ln(x)}{x^2-1}.$$

D'où pour tout $x>0$ et différent de 1 : $F'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$

6) Que vaut $F'(1)$?

Réponse : On a d'après 4) : $F'(1) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{du}{(u+1)^2} = \left[-\frac{1}{2(u+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$.

7) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx$ converge et déterminer sa valeur.

Réponse : La fonction $t \to \dfrac{\ln(t)}{t^2-1}$ est continue sur $]0,1]$, d'après le théorème fondamental de l'analyse et le résultat de la question précédente on a, pour tout $0<a<b<1$: $\displaystyle\int_a^b \frac{\ln(t)}{t^2-1}dt = F(b)-F(a)$. Comme, par continuité de F, $\displaystyle\lim_{b\to1^-} F(b) = F(1) = \frac{\pi^2}{8}$ et $\displaystyle\lim_{a\to0^+} F(a) = F(0) = 0$, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx$ converge et

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx = \lim_{\substack{b\to1^-\\ a\to0^+}} \int_a^b \frac{\ln(t)}{t^2-1}dt = F(1)-F(0) = \frac{\pi^2}{8}.$$