Université de Rennes 1 Année 2016/2017

Licence de Mathématiques

AN4 : Intégration

Épreuve du 9 mars 2017
Début 14 h - Durée 2 h

La consultation de documents et l'utilisation de calculettes ne sont pas autorisées. Passez votre téléphone en mode avion.

Exercice 1

On se donne une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dire dans chaque cas si l'affirmation est correcte en la justifiant ou en donnant un contre-exemple.

1) Si f est continue sur $]0,1[$, alors f est intégrable sur $[0,1]$.

2) Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f est intégrable sur $[0,1]$.

3) Si f est intégrable sur $[0,1]$, alors f est continue ou monotone sur $[0,1]$.

4) Si f est intégrable sur $[0,1]$ et sur $[1,2]$, alors f est intégrable sur $[0,2]$.

Exercice 2

1) Montrer que si une fonction continue f sur $[a,b]$ satisfait
$$\int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x = \left(\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \right)^2,$$
alors f est constante sur $[a,b]$.

2) Montrer que si une fonction continue f sur $[0,1]$ satisfait
$$\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$
alors l'équation $f(x) - x = 0$ a une solution dans $[0,1]$.

Exercice 3

1) Calculer $\displaystyle\int_{-3}^{0} |x^2 - x - 2| \mathrm{d}x$ (on pourra étudier le signe du polynôme).

2) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^3} \mathrm{d}x$ (on pourra poser $x = \tan u$).

3) Calculer $\displaystyle\int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan(x)\mathrm{d}x$ (on pourra effectuer le changement de variables $x \leftrightarrow 1/x$).

PROBLÈME

On considère pour $a > 1$, la fonction définie pour $x \in]1, +\infty[$ par

$$F_a(x) := \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

1) Montrer que $\ln t \leq t - 1$ pour $t > 0$ et en déduire que

$$\forall x \geq a, \quad F_a(x) \geq \ln\left(\frac{x-1}{a-1}\right). \tag{1}$$

2) Établir le tableau de variations de F_a ; on ne cherchera pas la limite en 1^+ mais on dira quand F_a s'annule.
3) En déduire qu'il existe un unique $b > 1$ tel que $F_a(b) = 1$ et, en utilisant l'inégalité (1), qu'on a

$$a \leq b \leq 1 + (a-1)e. \tag{2}$$

On désigne par $f :]1, +\infty[\to]1, +\infty[$ la fonction définie par

$$\int_x^{f(x)} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = 1.$$

4) Déduire des inégalités (2) les limites de f aux bornes de l'intervalle.
5) Dire pourquoi F_a possède une application réciproque F_a^{-1} et utiliser la relation de Chasles pour montrer que

$$\forall x > 1, \quad f(x) = F_a^{-1}(F_a(x) + 1)$$

6) Établir le tableau de variations de f.