Licence de Mathématiques

AN4 : Intégration

Corrigé de l'épreuve du 9 mars 2017
Début 14 h - Durée 2 h

La consultation de documents et l'utilisation de calculettes ne sont pas autorisées. Passez votre téléphone en mode avion.

Exercice 1

On se donne une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dire dans chaque cas si l'affirmation est correcte en la justifiant ou en donnant un contre-exemple.

1) Si f est continue sur $]0,1[$, alors f est intégrable sur $[0,1]$.

   Corrigé : Vrai. Une fonction intégrable sur $[a,b]$ est nécessairement bornée sur $[a,b]$. Or la fonction $f(x)=\frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0)=0$ n'est pas bornée sur $[0,1]$ alors qu'elle est bien continue sur $]0,1[$.

2) Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f est intégrable sur $[0,1]$.

   Corrigé : Vrai. Une fonction dérivable est continue.

3) Si f est intégrable sur $[0,1]$, alors f est continue ou monotone sur $[0,1]$.

   Corrigé : Faux. La fonction $f(x)=0$ si $x \neq 0,1$ et $f(x)=1$ sinon n'est ni monotone ni continue mais pourtant intégrable sur $[0,1]$ car c'est une fonction en escalier.

4) Si f est intégrable sur $[0,1]$ et sur $[1,2]$, alors f est intégrable sur $[0,2]$.

   Corrigé : Vrai. C'est la condition préalable à l'existence de la relation de Chasles.

Exercice 2

1) Montrer que si une fonction continue f sur $[a,b]$ satisfait

$$\int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x = \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2,$$

   alors f est constante sur $[a,b]$.

   Corrigé : On applique le théorème de Cauchy-Schwarz à la fonction f et à la fonction constante 1. Cela nous dit, en particulier, que cette égalité est satisfaite si et seulement si ces deux fonctions sont liées, ce qui signifie que f est constante.

2) Montrer que si une fonction continue f sur $[0,1]$ satisfait

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

   alors l'équation $f(x)-x=0$ a une solution dans $[0,1]$.

   Corrigé : On a

$$\int_0^1 (f(x)-x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 0.$$

   Comme cette fonction est continue, elle s'annule nécessairement sur $[0,1]$ (appliquer le théorème de Rolle à la primitive).

Exercice 3

1) Calculer $\displaystyle\int_{-3}^{0}|x^2-x-2|\mathrm{d}x$ (on pourra étudier le signe du polynôme).

Corrigé : On sait que x^2-x-2 est positive à l'extérieur des racines -2 et 1 et négative à l'intérieur. On aura donc

$$\int_{-3}^{0}|x^2-x-2|\mathrm{d}x = \int_{-3}^{-1}(x^2-x-2)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0}-(x^2-x-2)\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-3}^{-1} + \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{0} = \frac{59}{6}.$$

2) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\mathrm{d}x$ (on pourra poser $x=\tan u$).

Corrigé : Le changement de variable $x=\tan u$ (sans oublier $\mathrm{d}x=(1+\tan^2 u)\mathrm{d}u$ et $\tan\pi/4=1$) nous donne

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4}\frac{\tan^2 u}{(1+\tan^2 u)^2}\mathrm{d}x.$$

On calcule

$$\frac{\tan^2 u}{(1+\tan^2 u)^2} = \sin^2 u\cos^2 u = \frac{1}{4}\sin^2 2u = \frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4u}{2}\right).$$

On aura donc

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left[u-\frac{\sin 4u}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{32}.$$

3) Calculer $\displaystyle\int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan(x)\mathrm{d}x$ (on pourra effectuer le changement de variables $x\leftrightarrow 1/x$).

Corrigé : Désignons par I l'intégrale à calculer. Le changement de variable $x=1/u$ (sans oublier $\mathrm{d}x=(-1/u^2)\mathrm{d}u$ et l'échange des bornes de l'intervalle $[1/2,2]$) nous donne

$$I=\int_2^{1/2}(1+u^2)\arctan\left(\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u\right) = \int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\arctan\left(\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u.$$

Autrement dit, I ne change pas si on remplace x par $1/x$ dans l'argument de arctan. On utilise alors l'identité

$$\arctan(x)+\arctan(1/x)=\pi/2 \quad \text{pour } x>0,$$

qui nous donne

$$2I=\int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\frac{\pi}{2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{x}\right]_{1/2}^{2} = 3\frac{\pi}{2}$$

si bien que

$$\int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan(x)\mathrm{d}x = 3\frac{\pi}{4}.$$

PROBLÈME

On considère pour $a>1$, la fonction définie pour $x\in]1,+\infty[$ par

$$F_a(x) := \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

1) Montrer que $\ln t \leq t-1$ pour $t>0$ et en déduire que

$$\forall x \geq a, \quad F_a(x) \geq \ln\left(\frac{x-1}{a-1}\right). \tag{1}$$

Corrigé : Le tableau de variations

t	0		1		$+\infty$
$1-1/t$		$-$	0	$+$	
$t-1-\ln t$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

nous montre que $\ln t \leq t-1$ pour $t>0$ et on en déduit que

$$F_a(x) := \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \geq \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t-1} = [\ln(t-1)]_a^x = \ln\left(\frac{x-1}{a-1}\right).$$

2) Établir le tableau de variations de F_a ; on ne cherchera pas la limite en 1^+ mais on dira quand F_a s'annule.

Corrigé : Puisque $F_a'(x) = 1/\ln x$, que

$$F_a(x) \geq \ln\left(\frac{x-1}{a-1}\right) \to +\infty \quad \text{quand } x \to +\infty,$$

et que F_a s'annule en a, on trouve le tableau de variations suivant

x	1		a		$+\infty$
$1/\ln x$		$+$	0	$+$	
$F_a(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) En déduire qu'il existe un unique $b>1$ tel que $F_a(b)=1$ et, en utilisant l'inégalité (1), qu'on a

$$a \leq b \leq 1+(a-1)e. \tag{2}$$

Corrigé : L'existence de b résulte du théorème des valeurs intermédiaires et comme F_a est croissante et s'annule en a, on doit avoir $b \geq a$. De plus, en prenant l'exponentielle de chaque coté, l'inégalité

$$1 = F_a(b) \geq \ln\left(\frac{b-1}{a-1}\right)$$

nous fournit $e \geq (b-1)/(a-1)$, c'est à dire $b \leq 1+(a-1)e$.

On désigne par $f :]1,+\infty[\to]1,+\infty[$ la fonction définie par

$$\int_x^{f(x)} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = 1.$$

4) Déduire des inégalités (2) les limites de f aux bornes de l'intervalle.

Corrigé : L'inégalité ci-dessus (avec $a = x$ et $b = f(x)$) nous fournit

$$\forall x > 1, x \leq f(x) \leq 1 + (x-1)e.$$

On en déduit que

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

5) Dire pourquoi F_a possède une application réciproque F_a^{-1} et utiliser la relation de Chasles pour montrer que

$$\forall x > 1, \quad f(x) = F_a^{-1}(F_a(x) + 1)$$

Corrigé : L'application F_a est continue et monotone et induit donc bien une bijection de son domaine sur son image. De plus, la relation de Chasles nous fournit pour tout $x > 1$,

$$F_a(f(x)) - F_a(x) = \int_x^{f(x)} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = 1$$

si bien que $F_a(f(x)) = F_a(x) + 1$ et $f(x) = F_a^{-1}(F_a(x) + 1)$ comme annoncé.

6) Établir le tableau de variations de f.

Corrigé : L'application F_a étant croissante, il en va de même de $F_a + 1$ et de F_a^{-1} ainsi que de leur composée qui est la fonction f. Comme on a déjà calculé les limites aux bornes, on aura tout simplement

x	1		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Alternativement, pour montrer que F_a est croissante, on peut aussi dériver l'identité $F_a(f(x)) = F_a(x) + 1$, ce qui nous donne

$$\frac{1}{\ln f(x)} f'(x) = \frac{1}{\ln x}$$

et nous montre que $f'(x) \geq 0$.