Université de Rennes 1 Année 2015/2016

Licence de Mathématiques

AN4 : Intégration

Épreuve du 10 mars 2016
Début 14 h - Durée 2 h

La consultation de documents et l'utilisation de calculettes ne sont pas autorisées. Passez votre téléphone en mode avion.

1) Dans cet exercice, et dans celui-ci seulement, aucune justification n'est demandée. On se donne une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   (a) Si f est en escaliers, alors f est intégrable .... VRAI FAUX

   (b) Si f est monotone, alors f est intégrable .... VRAI FAUX

   (c) Si f est continue, alors f est intégrable .... VRAI FAUX

   (d) Si f est en escaliers, alors f admet une primitive .... VRAI FAUX

   (e) Si f est monotone, alors f admet une primitive .... VRAI FAUX

   (f) Si f est continue, alors f admet une primitive .... VRAI FAUX

   (g) Si f est intégrable, alors f admet une primitive .... VRAI FAUX

   (h) Si f admet une primitive, alors f est intégrable .... VRAI FAUX

2) On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases} .$$

   (a) Calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ pour $x \in [0, 4]$.

   (b) La fonction F est-elle dérivable sur l'intervalle $[1, 4]$? Si oui, quelle est sa dérivée ?

3) (a) Rappeler l'énoncé du théorème de Cauchy-Schwarz.

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 x^n f(x)^2 \mathrm{d}x.$$

(b) Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+m}^2 \leq I_{2n} I_{2m}$.

(c) Quand obtient-on une égalité ?

4) Calculer dans chaque cas la limite de la suite :

(a) $u_n = n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^2}$.

(b) $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n^2 + k^2}{n^2} \right)^{\frac{1}{n}}$.

5) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{(-1)^n x^n}{1+x} \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k},$$

avec la convention $S_0 = 0$.

(a) Montrer que $|I_n| \leq \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{d}x$.

(b) En déduire que la suite I_n tend vers 0.

(c) Calculer I_0.

(d) Calculer $I_n - I_{n+1}$.

(e) Montrer par récurrence que $S_n = I_0 - I_n$.

(f) En déduire que la suite S_n converge et calculer sa limite.

6) Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{4x^5}{x^4 - 1} \mathrm{d}x$.

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 2x + 4}$.

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sin x}$.

(d) $\displaystyle\int_0^1 \arcsin(\sqrt{x}) \mathrm{d}x$.