Université de Rennes 1 Année 2015/2016

Licence de Mathématiques

AN4 : Intégration

Corrigé de l'épreuve du 10 mars 2016
Début 14 h - Durée 2 h

La consultation de documents et l'utilisation de calculettes ne sont pas autorisées. Passez votre téléphone en mode avion.

1) Dans cet exercice, et dans celui-ci seulement, aucune justification n'est demandée. On se donne une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   (a) Si f est en escaliers, alors f est intégrable .... $\boxed{\text{VRAI}}$ FAUX

   (b) Si f est monotone, alors f est intégrable .... $\boxed{\text{VRAI}}$ FAUX

   (c) Si f est continue, alors f est intégrable .... $\boxed{\text{VRAI}}$ FAUX

   (d) Si f est en escaliers, alors f admet une primitive .... VRAI $\boxed{\text{FAUX}}$

   (e) Si f est monotone, alors f admet une primitive .... VRAI $\boxed{\text{FAUX}}$

   (f) Si f est continue, alors f admet une primitive .... $\boxed{\text{VRAI}}$ FAUX

   (g) Si f est intégrable, alors f admet une primitive .... VRAI $\boxed{\text{FAUX}}$

   (h) Si f admet une primitive, alors f est intégrable .... VRAI $\boxed{\text{FAUX}}$

2) On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}.$$

   (a) Calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ pour $x \in [0, 4]$.

   On a

$$F(x) = \begin{cases} x & & & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - 2(x-1) & = & -2x + 3 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 - 2 + 4(x-2) & = & 4x - 9 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}.$$

(b) La fonction F est-elle dérivable sur l'intervalle $[1,4]$? Si oui, quelle est sa dérivée ?

Cette fonction n'est pas dérivable en 1 car la dérivée à gauche vaut 1 et la dérivée à droite vaut -2.

3) (a) Rappeler l'énoncé du théorème de Cauchy-Schwarz.

Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont intégrables sur $[a,b]$, alors

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g(x)^2\mathrm{d}x\right).$$

avec égalité si et seulement si f et g sont liées ($f = 0$ ou $g = \lambda f$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$).

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 x^n f(x)^2\mathrm{d}x.$$

(b) Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+m}^2 \leq I_{2n}I_{2m}$.

Dans le théorème de Cauchy-Schwartz on remplace $f(x)$ et $g(x)$ par $x^n f(x)$ et $x^m f(x)$ respectivement, ce qui donne

$$\left(\int_0^1 x^{n+m} f(x)^2\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left|\int_0^1 x^{2n} f(x)^2\mathrm{d}x\right|\left|\int_0^1 x^{2m} g(x)^2\mathrm{d}x\right|.$$

(c) Quand obtient-on une égalité ?

On obtient une égalité lorsque pour tout $x \in [0,1]$, on a soit $x^n f(x) = 0$ ou bien $x^m f(x) = \lambda x^n f(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On réécrit la seconde égalité sous la forme $(\lambda x^n - x^m)f(x) = 0$. Le polynôme x^n n'est jamais nul et le polynôme $\lambda x^n - x^m$ est nul si et seulement si $m = n$ et $\lambda = 1$. Dans le cas contraire, le polynôme a un nombre fini de zéros, et comme f est continue, elle doit être nulle sur $[a,b]$. Conclusion : $f = 0$ ou $n = m$.

4) Calculer dans chaque cas la limite de la suite :

(a) $u_n = n\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$.

On a

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2},$$

et donc

$$\lim u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

(b) $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n^2+k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

On a
$$\ln(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$$
et on peut calculer en intégrant par partie
$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1+x^2)\mathrm{d}x &= [x\ln(1+x^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \ln(2) - 2\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \ln(2) - 2[x-\arctan(x)]_0^1 \\ &= \ln(2) - 2(1-\frac{\pi}{4}) \\ &= \ln(2) + \frac{\pi}{2} - 2.\end{aligned}$$
Il suit que $\lim \ln(u_n) = \ln(2) + \frac{\pi}{2} - 2$ et donc que
$$\lim u_n = e^{\ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2} = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}.$$

5) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_n = \int_0^1 \frac{(-1)^n x^n}{1+x}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k},$$
avec la convention $S_0 = 0$.

(a) Montrer que $|I_n| \leq \int_0^1 x^n \mathrm{d}x$.

Puisque $1+x \geq 1$ sur $[0,1]$, on a
$$\left|\int_0^1 \frac{(-1)^n x^n}{1+x}\mathrm{d}x\right| = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n \mathrm{d}x.$$

(b) En déduire que la suite I_n tend vers 0.

En effet, on a
$$\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$
et on conclut avec le théorème des gendarmes.

(c) Calculer I_0.

On a
$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2).$$

(d) Calculer $I_n - I_{n+1}$.

On a

$$\begin{aligned} I_n - I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{(-1)^n x^n}{1+x}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x \\ &= (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x \\ &= (-1)^n \int_0^1 x^n \mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^n}{n+1}. \end{aligned}$$

(e) Montrer par récurrence que $S_n = I_0 - I_n$.

L'amorce est triviale, et si on suppose que $S_n = I_0 - I_n$, on aura bien

$$S_{n+1} = S_n + \frac{(-1)^n}{n+1} = I_0 - I_n + I_n - I_{n+1} = I_0 - I_{n+1}.$$

(f) En déduire que la suite S_n converge et calculer sa limite.

Comme I_n converge, S_n aussi et puisque I_n converge vers 0, on aura bien sûr

$$\lim S_n = I_0 - \lim I_n = \ln(2).$$

6) Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{4x^5}{x^4-1}\mathrm{d}x$.

On commence par remarquer que $x^5 = x(x^4-1) + x$ (ou faire la division euclidienne) si bien que

$$\frac{4x^5}{x^4-1} = 4x + \frac{4x}{x^4-1}.$$

On cherche ensuite $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{4x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}.$$

i. On multiplie par $x-1$ et on fait $x = 1$, ce qui donne $\frac{4}{4} = a$ si bien que $a = 1$.
ii. On multiplie par $x+1$ et on fait $x = -1$, ce qui donne $\frac{-4}{-4} = b$ si bien que $b = 1$ aussi.
iii. On fait alors $x = 0$, ce qui donne $0 = -a + b + d$, ce qui montre que $d = 0$.
iv. Enfin, on multiplie par x avant de le faire tendre vers l'infini pour trouver $0 = a + b + c$ si bien que $c = -2$.

Il ne reste plus qu'à intégrer

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{4x^5}{x^4-1}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(4x + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[2x^2 + \ln|x-1| + \ln|x+1| - \ln(x^2+1)\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= 1 + \left[\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= 1 - \ln(3).
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+4}$.

On écrit $x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 = 3(u^2+1)$ avec $3u^2 = (x-1)^2$ si bien que $u = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$. On en déduit que $\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{d}x$ si bien que $\mathrm{d}x = \sqrt{3}\mathrm{d}u$. On aura donc

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+4} = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^0 \frac{\sqrt{3}\mathrm{d}u}{3(u^2+1)} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\arctan(u)\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$

puisque $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (et la tangente est impaire).

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin(x)}$.

On pose $t = \tan\frac{x}{2}$ si bien que $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ et on aura donc

$$\frac{1}{1+\sin(x)} = \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1}{\frac{1+t^2+2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{(t+1)^2}$$

Puisque

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1+t^2)\mathrm{d}x,$$

on voit que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin(x)} = \int_0^1 \frac{2\mathrm{d}t}{(t+1)^2} = -2\left[\frac{1}{t+1}\right]_0^1 = -2\left(\frac{1}{2}-1\right) = 1.$$

Mea culpa : la formule de trigonométrie utilisée ci-desus s'obient en remarquant d'abord que

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)} = \frac{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = 1 + \tan^2(\theta),$$

puis en utilisant la formule inverse dans

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta) = 2\frac{\sin(\theta)}{\cos\theta}\cos^2(\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}.$$

(d) $\int_0^1 \arcsin(\sqrt{x})\mathrm{d}x$.

On pose $x = \sin^2(u)$ si bien que $\mathrm{d}x = 2\sin(u)\cos(u)\mathrm{d}u = \sin(2u)\mathrm{d}u$ et donc

$$\int_0^1 \arcsin(\sqrt{x})\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u\sin(2u)\mathrm{d}u.$$

On intègre alors par partie pour trouver

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arcsin(\sqrt{x})\mathrm{d}x &= \left[u\frac{-\cos(2u)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos(2u)}{2}\mathrm{d}u \\ &= \frac{\pi}{4} + \left[\frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$