3 Intégrales de Riemann

Introduction
Dans tout ce chapitre, $I = [a\,,\,b]$ désignera un segment de $\mathbb{R}$ avec $a\,,\,b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.

3.1 Intégrale d'une fonction étagée.

Définition 4.1.1 - *Subdivision.*
On appelle subdivision σ du segment $[a\,,\,b]$ une suite finie $\sigma = \{x_0\,,\,x_1\,,\,\dots\,,\,x_n\}$ de points de $[a\,,\,b]$ tels que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. On notera $\mathcal{O}([a\,,\,b])$ l'ensemble des subdivisions de $[a\,,\,b]$. $\triangle$

Définition 4.1.2 - *Subdivision régulière.*
On appelle subdivision régulière d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de $[a\,,\,b]$ l'unique élément $\sigma_n \in \mathcal{O}([a\,,\,b])$ obtenu en découpant l'intervalle $[a\,,\,b]$ en n sous-intervalles de même longueur. Ainsi :

$$\sigma_n := \left\{x_0 = a\,,\,\dots\,,\,x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}\,,\,\dots\,,\,x_n = b\right\}.$$ $\triangle$

Définition 4.1.3 - *Fonction étagée.*
On appelle fonction *étagée* ou *en escalier* sur $[a\,,\,b]$ une fonction $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ pour laquelle il existe une subdivision $\sigma = \{x_0\,,\,\dots\,,\,x_n\}$ de $[a\,,\,b]$ telle que, pour tout entier $i \in [\![0\,,\,\dots\,,\,n-1]\!]$, la restriction de f à l'intervalle $]x_i\,,\,x_{i+1}[$ soit constante. Une telle subdivision σ est dite associée, ou adaptée, à f. On désignera par $\mathcal{E}([a\,,\,b])$ l'ensemble des fonctions étagées sur $[a\,,\,b]$. $\triangle$

Ainsi, si $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est étagée et si $\sigma = \{x_0\,,\,\dots\,,\,x_n\}$ est une subdivision associée à f, il existe des constantes réelles $m_i\,, i \in [\![0\,,\,\dots\,,\,n-1]\!]$ telles que :

$$\forall t \in]x_i\,,\,x_{i+1}[\quad , \quad f(t) = m_i\,.$$

Ex.1 Toute fonction constante sur $[a\,,\,b]$ est étagée sur $[a\,,\,b]$.

Ex.2 La fonction $f : [0\,,\,2] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 1 \\ 1 & \text{si} \quad t = 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < t \leqslant 2 \end{cases}$$

est étagée sur $[0\,,\,2]$. Pour le voir, il suffit de remarquer que la subdivision $\sigma = \{0\,,\,1\,,\,2\}$ est adaptée à f. Le choix d'une subdivision adaptée à f n'est pas unique. Par exemple, la subdivision $\sigma' = \{0\,,\,1/2\,,\,1\,,\,2\}$ est aussi adaptée à f puisque $f\,|_{]0\,,\,\frac{1}{2}[}$ et $f\,|_{]\frac{1}{2}\,,\,1[}$ sont des fonctions constantes.

Exercice 3.1.1 *Soit* $f : [0\,,\,3] \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par :*

$$f(t) = \begin{cases} -1 & si \quad t = 0 \\ 1 & si \quad 0 < t < 1 \\ 3 & si \quad t = 1 \\ -2 & si \quad 1 < t \leq 2 \\ 4 & si \quad 2 < t \leq 3\,. \end{cases}$$

Montrer que f *est étagée sur* $[0, 3]$ *et identifier une subdivision adaptée à* f.

La notion d'intégrale repose sur la proposition suivante.

Proposition 4.1.1
Soient $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction étagée et $\sigma = \{x_0\,,\,\dots\,,\,x_n\}$ une subdivision adaptée à f. Pour tout entier $i \in [\![0\,,\,\dots\,,\,n-1]\!]$, posons : $f(t) = m_i$ si $t \in]x_i\,,\,x_{i+1}[$. Alors l'expression $I(\sigma\,,\,f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)\,m_i$ ne dépend

pas du choix de la subdivision σ adaptée à f. Le nombre réel $I(\sigma\,,\,f)$ ainsi obtenu se note

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; I(\sigma\,,\,f) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\,m_i$$

et s'appelle *intégrale* de f sur $[a\,,\,b]$.

Preuve
Choisissons une subdivision $\sigma \in \mathcal{O}([a\,,\,b])$ telle que $\sigma = \{x_0\,,\,\ldots\,,\,x_n\}$ soit une subdivision adaptée à f sur $[a\,,\,b]$. Considérons la subdivision $\tilde\sigma = \sigma \cup \{y\}$, où y est un point de $[a\,,\,b]$, distinct des points $x_i\,, i = 0\,,\,\ldots\,,\,n$. Soit $i_0 \in \{0\,,\,1\,,\,\ldots\,,\,n-1\}$ tel que $x_{i_0} < y < x_{i_0+1}$. Alors $\tilde\sigma = \{x_0\,,\,x_1\,,\,\ldots\,,\,x_{i_0}\,,\,y\,,\,x_{i_0+1}\,,\,\ldots\,,\,x_n\}$ est adaptée à f et on a :

$$\begin{aligned} I(\tilde\sigma\,,\,f) &= \sum_{i=0}^{i_0-1}(x_{i+1}-x_i)\,m_i + (y-x_{i_0})\,m_{i_0} + (x_{i_0+1}-y)\,m_{i_0} + \sum_{i=i_0+1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\,m_i \\ &= \sum_{i=0}^{i_0-1}(x_{i+1}-x_i)\,m_i + (x_{i_0+1}-x_{i_0})\,m_i + \sum_{i=i_0+1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\,m_i = I(\sigma\,,\,f). \end{aligned}$$

Soient maintenant σ et σ' deux subdivisions adaptées à f. Alors, la subdivision $\sigma'' = \sigma \cup \sigma'$ est encore adaptée à f et, itérant le calcul précédent pour chaque point de σ'', on obtient immédiatement que $I(\sigma\,,\,f) = I(\sigma''\,,\,f)$, et aussi $I(\sigma'\,,\,f) = I(\sigma''\,,\,f)$. Par suite, $I(\sigma\,,\,f) = I(\sigma'\,,\,f)$.

$\square$

Exercice 3.1.2 *Soit* $f : [0\,,\,3] \to \mathbb{R}$ *la fonction définie au niveau de l'exercice 4.1.1.*
1) Calculer $\int_0^3 f(t)\,dt$ *puis* $\int_0^3 |f(t)|\,dt$.
2) Soit $x \in [0,3]$. *Calculer* $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.
3) Montrer que l'application $F : [0\,,\,3] \to \mathbb{R}$ *(avec* $F(x)$ *défini comme en 2) est continue sur* $[0\,,\,3]$. *La fonction* F *est-elle dérivable en tout point de l'intervalle* $[0\,,\,3]$ *?*

Interprétation de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ pour une fonction étagée positive ou nulle

Si $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est étagée et positive ou nulle sur $[a\,,\,b]$, alors, pour tout entier $i \in [\![0\,,\,\ldots\,,\,n-1]\!]$, m_i est positif ou nul. Par suite : $I(\sigma\,,\,f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$.
De plus, de la définition de $I(\sigma\,,\,f)$, il résulte que ce nombre est exactement la mesure de l'aire comprise entre l'axe des abscisses, les deux droites $t = a\,,\,t = b$, et le graphe de la fonction f.

Lorsque $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est étagée et n'est pas supposée positive ou nulle, $I(\sigma\,,\,f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ correspond à l'aire algébrique comprise entre l'axe des abscisses, les deux droites $t = a\,,\,t = b$, et le graphe de la fonction f. Par exemple, si $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est constante et égale à -1, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = -(b-a) = -|b-a| < 0$.

Remarque importante. On fixe $c \in]a\,,\,b[$. On considère $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = 0$ si $t \in [a\,,\,b] \setminus \{c\}$ et $f(c) \in \mathbb{R}^*$. Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = (c-a)\,0 + (b-c)\,0 = 0$. Ainsi $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ peut être nulle sans que f soit identiquement nulle. Plus généralement, si $f(t) = 0$ sauf en un nombre fini de points de $[a\,,\,b]$, alors f est étagée sur $[a\,,\,b]$ et on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$.

Propriétés de l'intégrale d'une fonction étagée

Proposition 4.1.2
Soient $f\,,\,g \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$. Alors :

(i) $f+g \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$ et $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.

(ii) Pour tout réel λ, on a $\lambda \cdot f \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$ et $\displaystyle\int_a^b (\lambda \cdot f)(t)\,dt = \lambda \cdot \int_a^b f(t)\,dt$.

(iii) Si $f \geqslant g$ (i.e. : $\forall t \in [a\,,\,b]\,,\ f(t) \geqslant g(t)$), alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant \int_a^b g(t)\,dt$.

En particulier, $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$.

(iv) Si $f = g$, sauf en un nombre fini de points de $[a\,,\,b]\,,\ \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$.

(v) Pour tout $c \in]a\,,\,b[\,$, on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$, où $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ (resp. $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$) désigne l'intégrale de la restriction de f au segment $[a\,,\,c]$ (resp. $[c\,,\,b]$). Cette relation s'appelle *relation de Chasles* pour les éléments de $\mathcal{E}([a\,,\,b])$.

Preuve
Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a\,,\,b]$ adaptées à f et g. Alors $\sigma'' = \sigma \cup \sigma' = \{x_0\,,\,\ldots\,,\,x_N\}$ est adaptée à f, et à g. On en déduit que :

$$I_{\sigma''}(f) = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1}-x_i)\,m_i \quad , \quad \text{où } m_i = f(t) \text{ si } t \in]x_i\,,\,x_{i+1}[$$

$$I_{\sigma''}(g) = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1}-x_i)\,m_i' \quad , \quad \text{où } m_i' = g(t) \text{ si } t \in]x_i\,,\,x_{i+1}[$$

et donc $I_{\sigma''}(f+g) = I_{\sigma''}(f) + I_{\sigma''}(g)$, d'où (i) et, de même (ii), (iii). En particulier, si $f \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$, $|f| \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$ et comme $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, on en déduit que $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$.
Pour (iv), soit $\theta = \{x_0\,,\,\ldots\,,\,x_N\}$ une subdivision de $[a\,,\,b]$ contenant les points t de $[a\,,\,b]$ pour lesquels $f(t) \neq g(t)$. Alors, on a immédiatement : $I_\theta(f) = I_\theta(g)$, d'où (iv).
Soit maintenant $c \in]a\,,\,b[\,$. Notons f_1 et f_2 les restrictions de f aux segments $[a\,,\,c]$ et $[c\,,\,b]$; f_1 et f_2 sont encore des fonctions étagées. Considérons les fonctions $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ définies par :

$$\tilde{f}_1(t) = \begin{cases} f(t) & , \quad t \in [a\,,\,c] \\ 0 & , \quad t \in]c\,,\,b] \end{cases} \qquad , \qquad \tilde{f}_2(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \in [a\,,\,c[\\ f(t) & , \quad t \in [c\,,\,b] \end{cases} \quad .$$

Il résulte immédiatement de la définition et de la proposition que :

$$\int_a^c f_1(t)\,dt = \int_a^b \tilde{f}_1(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_c^b f_2(t)\,dt = \int_a^b \tilde{f}_2(t)\,dt\,.$$

Par ailleurs, les fonctions f et $g = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$ coïncident en tout point de $[a\,,\,b] \setminus \{c\}$, d'après (iv), on a donc : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$, ce qui prouve (v).

$\square$

Exercice 3.1.3 *Soit f une fonction qui est étagée sur $[0,1]$ et qui prend ses valeurs dans l' intervalle $[a,b]$ où $a < 0 < b$. On suppose de plus que $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.*
1) Montrer que les fonctions $f_+ := \max(f,0)$ et $f_- := -\min(f,0)$ sont encore étagées sur $[0,1]$.

2) Prouver que : $\int_0^1 f_+(t)\,dt = \int_0^1 f_-(t)\,dt$. *On note* γ *ce nombre.*

3) Prouver qu'il existe $\theta \in [0,1]$ *tel que :* $0 \leq \gamma \leq \min\big(\theta\, b\,;\,-(1-\theta)\,a\big)$.

4) Etablir l'inégalité : $\int_0^1 f(t)^2\,dt \leq b \int_0^1 f_+(t)\,dt - a \int_0^1 f_-(t)\,dt$.

5) Déduire de ce qui précède la majoration : $\int_0^1 f(t)^2\,dt \leq -a\,b$.

Remarque. Il résulte de cette proposition que $\mathcal{E}([a\,,\,b])$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que l'application $f \longmapsto I(f) = \int_a^b f(t)\,dt \;:\; \mathcal{E}([a\,,\,b]) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire, compatible avec la structure d'ordre partiel $\leqslant$ sur $\mathcal{E}([a\,,\,b])$.

3.2 Fonction intégrable au sens de Riemann.

On va étendre la notion d'intégrale à des fonctions $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ plus générales que les fonctions étagées.

Définition 4.2.1 - *Intégrable au sens de Riemann.*
Une fonction $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est dite intégrable au sens de Riemann (on dit aussi Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions étagées u_ε et $v_\varepsilon \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$ telles que :

(i) $u_\varepsilon \leqslant f \leqslant v_\varepsilon$.

(ii) $\displaystyle\int_a^b (v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t)\,dt \leqslant \varepsilon$.

On notera $\mathcal{R}([a\,,\,b])$ l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables sur $[a\,,\,b]$. △

Il résulte de cette définition que :

- Toute fonction étagée sur $[a\,,\,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$, i.e. : $\mathcal{E}([a\,,\,b]) \subset \mathcal{R}([a\,,\,b])$.
- Si $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, alors f est bornée sur $[a\,,\,b]$, puisque f est majorée et minorée sur $[a\,,\,b]$ par une fonction étagée sur $[a\,,\,b]$, et que toute fonction étagée sur $[a\,,\,b]$ est évidemment bornée sur $[a\,,\,b]$.

Exercice 3.2.1 *Les fonctions* f *suivantes sont-elles intégrables au sens de Riemann ?*

1) $f : [0\,,\,2] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(t) = [t]$ *où le symbole* $[t]$ *désigne la partie entière de* t.

2) $f : [0\,,\,1] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(t) = \begin{cases} [\frac{1}{t}] & si \quad 0 < t \leq 1\,, \\ 1 & si \quad t = 0\,. \end{cases}$

3) $f : [0\,,\,1] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right) & si \quad 0 < t \leq 1\,, \\ 1 & si \quad t = 0\,. \end{cases}$

4) $f : [0\,,\,1] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\,, \\ 1 & si \quad t \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$

Soit maintenant f une fonction bornée sur $[a\,,\,b]$.
Considérons $A(f) = \left\{ \displaystyle\int_a^b u(t)\,dt\,;\, u \in \mathcal{E}([a\,,\,b]) \text{ avec } u \leqslant f \right\}$ et $B(f) = \left\{ \displaystyle\int_a^b v(t)\,dt\,;\, v \in \mathcal{E}([a\,,\,b]) \text{ avec } f \leqslant v \right\}$.
$A(f)$ et $B(f)$ sont deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ puisque f est majorée et minorée sur $[a\,,\,b]$.
De plus, pour tout $\alpha \in A(f)$ et $\beta \in B(f)$, il existe des fonctions étagées sur $[a\,,\,b]$, u, v telles que : $\alpha = \displaystyle\int_a^b u(t)\,dt$ et $\beta = \displaystyle\int_a^b v(t)\,dt$. Comme on a : $u \leqslant v$, on a donc $\alpha \leqslant \beta$.

Ainsi $A(f)$ est non vide, majoré, il admet donc une borne supérieure $I_+(f) = \sup\, A(f) = \sup\limits_{\alpha \in A(f)} \alpha$.
De même, $B(f)$ est non vide minoré et admet une borne inférieure $I_-(f) = \inf B(f) = \inf\limits_{\beta \in B(f)} \beta$ et, de ce qui précède, on déduit que : $I_+(f) \leqslant I_-(f)$.

Maintenant, si $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann, on va voir que $I_-(f) = I_+(f)$. En effet, soit $\varepsilon > 0$, il existe u_ε et $v_\varepsilon \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$ telles que (i) et (ii). On a donc : $\alpha_\varepsilon = \displaystyle\int_a^b u_\varepsilon(t)\,dt \in A(f)$ et $\beta_\varepsilon = \displaystyle\int_a^b v_\varepsilon(t)\,dt \in B(f)$ et $\beta_\varepsilon - \alpha_\varepsilon \leqslant \varepsilon$. Comme par ailleurs, on a : $\alpha_\varepsilon \leqslant I_+(f) \leqslant I_-(f) \leqslant \beta_\varepsilon$, on en déduit que $I_-(f) = I_+(f)$.

Ceci nous amène à la définition suivante :

Définition 4.2.2 - *Intégrale de f sur $[a\,,\,b]$.*
Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable. Le nombre $I_+(f) = \sup A(f) = \inf B(f) = I_-(f)$ s'appelle intégrale de f sur le segment $[a\,,\,b]$ et se note $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt.$ △

Remarques

- Si f est étagée sur $[a\,,\,b]$, on a immédiatement que $I_+(f) = I_-(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ (prendre $u_\varepsilon = v_\varepsilon = f$). Ainsi, cette définition de l'intégrale $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ pour $f \in \mathcal{R}([a\,,\,b])$ est bien une généralisation de la notion d'intégrale des fonctions étagées sur $[a\,,\,b]$.
- Si f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$, il résulte de la définition que si $u\,,\,v \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$ et vérifient $u \leqslant f \leqslant v$, alors : $\displaystyle\int_a^b u(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b v(t)\,dt.$

Définition 4.2.3 - *Somme de Riemann.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma_n = \{x_0, \cdots, x_n\}$ la subdivision régulière d'ordre n de l'intervalle $[a, b]$. On considère un n-uplet $\xi = (\xi_0\,,\,\ldots\,,\,\xi_{n-1})$ formé de n points de $[a\,,\,b]$ répartis selon :

$$\xi_k \in [x_k\,,\,x_{k+1}] = \left[a + k\,\tfrac{b-a}{n}\,,\,a + (k+1)\,\tfrac{b-a}{n}\right], \qquad \forall\, k \in \{0, \ldots, n-1\}\,.$$

Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$. La somme de Riemann associée à la fonction f, à σ_n et au choix de ξ est l'expression :

$$\sigma_n(f\,,\,\xi) := \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,.$$ △

Exemple. Les sommes $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$ et $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ sont des sommes de Riemann particulières obtenues en prenant respectivement $\xi = (x_0\,,\,\ldots\,,\,x_{n-1})$ et $\xi = (x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n)$.

Le résultat qui suit identifie une famille de fonctions Riemann-intégrables (les fonctions monotones). Il établit aussi un lien entre l'intégrabilité d'une fonction f et la convergence (lorsque $n \longrightarrow \infty$) de certaines sommes de Riemann attachées à f.

Théorème 4.2.1
Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$.
De plus, si $\sigma_n = \left\{x_0 = a\,,\,\ldots\,,\,x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}\,,\,\ldots\,,\,x_n = b\right\}$ est la subdivision régulière d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de

$[a\,,\,b]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Preuve
On suppose d'abord que $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est croissante et on considère la subdivision régulière σ_n associée aux points $x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$, $k \in [\![0\,,\,\dots\,,\,n]\!]$, $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère les fonctions étagées u_n et v_n sur $[a\,,\,b]$ définies par :

$$u_n(t) = \begin{cases} f(x_k) & \text{si} \quad x_k \leqslant t < x_{k+1} \;\;,\;\; 0 \leqslant k < n \\ f(b) & \text{si} \quad t = b \end{cases}$$

$$v_n(t) = \begin{cases} f(a) & \text{si} \quad t = a \\ f(x_{k+1}) & \text{si} \quad x_k < t \leqslant x_{k+1} \;\;,\;\; 0 \leqslant k < n \end{cases}.$$

On a clairement $u_n \leqslant f \leqslant v_n$ puisque f est monotone croissante. De plus :

$$\int_a^b u_n(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\, f(x_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

$$\int_a^b v_n(t)\,dt = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

$$\text{et} \int_a^b (v_n - u_n)(t)\;dt = \int_a^b v_n(t)\,dt - \int_a^b u_n(t)\,dt = \frac{b-a}{n}\,[f(b) - f(a)].$$

Par suite, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b-a}{n}\,[f(b)-f(a)] = 0$, f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$ et, comme pour tout entier $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_a^b u_n(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b v_n(t)\,dt$, on déduit que :

$$0 \leqslant \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b u_n(t)\,dt \leqslant \int_a^b (v_n - u_n)(t)\,dt = \frac{b-a}{n}\,[f(b) - f(a)]\,.$$

La suite $\displaystyle\int_a^b u_n(t)\,dt = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$ est donc convergente vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.
De même, la suite $\displaystyle\int_a^b v_n(t)\,dt = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ est convergente vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.
Maintenant si $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est monotone décroissante, il suffit d'appliquer ce qui précède à la fonction $-f$.
□

Exercice 3.2.2 *Montrer que les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ via $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ et $h(x) = e^x$ sont intégrables sur tout intervalle $[a, b]$ avec $0 \leq a < b$. En utilisant comme ci-dessus des subdivisions régulières, calculer les intégrales $\int_0^1 f(t)\,dt$, $\int_1^2 g(t)\,dt$ et $\int_0^x h(t)\,dt$ (avec $x > 0$).*

Exercice 3.2.3 *On pose :* $S_n = \dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$, $\qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1) Donner un exemple de fonction $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue positive et croissante telle que :
$S_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\frac{j}{n})$.

2) On se place sur l'intervalle $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$. Etablir l'encadrement :
$\frac{1}{n}\, f(\frac{j}{n}) \leq \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(t)\;dt \leq \frac{1}{n}\, f(\frac{j+1}{n})$, $\qquad \forall j \in \{0, \cdots, n\}$.

3) En déduire que :

$\int_0^1 f(t)\ dt \leq S_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{n}} f(t)\ dt\,.$

4) Prouver que S_n converge lorsque n tend vers l'infini vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$. Calculer l.

Application 4.2.1.

Une fonction continue $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si elle est l'intégrale d'une fonction croissante sur $[a\,,\,b]$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction croissante $\phi : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in [a\,,\,b] \quad , \quad f(x) \ = \ f(a) + \int_a^x \phi(t)\,dt\,.$$

Preuve

Si $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall x \in [a\,,\,b] \quad , \quad f(x) \ = \ f(a) + \int_a^x \phi(t)\,dt$$

alors la fonction $y \longmapsto \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = \dfrac{\int_x^y \phi(t)\,dt}{y - x} : [a\,,\,b] \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante.

En effet, supposons que $x < y_1 < y_2$, on doit alors vérifier que :

$$(y_2 - x) \int_x^{y_1} \phi(t)\,dt \ \leqslant \ (y_1 - x) \int_x^{y_2} \phi(t)\,dt\,.$$

Puisque ϕ est croissante on a :

$$\begin{aligned}
(y_2 - x) \int_x^{y_1} \phi(t)\,dt \ &= \ (y_2 - y_1) \int_x^{y_1} \phi(t)\,dt + (y_1 - x) \int_x^{y_1} \phi(t)\,dt \\
&\leqslant \ (y_2 - y_1)\,\phi(y_1)\,(y_1 - x) + (y_1 - x) \int_x^{y_1} \phi(t)\,dt \\
&\leqslant \ (y_1 - x) \int_{y_1}^{y_2} \phi(t)\,dt + (y_1 - x) \int_x^{y_1} \phi(t)\,dt \\
&= \ (y_1 - x) \int_x^{y_2} \phi(t)\,dt\,.
\end{aligned}$$

On étudie de même les cas où $y_1 < y_2 < x$ et $y_1 < x < y_2$. Ainsi, f est convexe sur $[a\,,\,b]$.

Réciproquement, si f est convexe sur $[a\,,\,b]$, f admet des dérivées à gauche f'_g sur $]a\,,\,b]$ et à droite f'_d sur $[a\,,\,b[$ croissantes sur $[a\,,\,b]$, donc Riemann-intégrables sur $[a\,,\,b]$.

On va démontrer que pour tout $x \in [a\,,\,b]$, $f(x) - f(a) = \displaystyle\int_a^x f'_d(t)\,dt = \int_a^x f'_g(t)\,dt\,.$

Soit $\sigma = \{a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = x\}$ une subdivision régulière d'ordre n de $[a\,,\,x]$. On a alors, puisque f est convexe :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\,f'_d(a_k) \ \leqslant \ \sum_{k=0}^{n-1} (f(a_{k+1}) - f(a_k)) \ \leqslant \ \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\,f'_g(a_{k+1})\,,$$

i.e. : $$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\,f'_d(a_k) \leqslant f(x) - f(a) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\,f'_g(a_{k+1})\,.$$

Par ailleurs,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\,f'_g(a_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\,f'_d(a_k) \ = \ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f'_g(a_{k+1}) - f'_d(a_k))$$

$$= \frac{1}{n}\left[(f'_g(x)-f'_d(a))+\sum_{k=0}^{n-2}(f'_g(a_{k+1})-f'_d(a_{k+1}))\right] \leqslant \frac{1}{n}(f'_g(x)-f'_d(a))$$

puisque pour $k=0\,,\,\ldots\,,\,n-1\,,\; f'_g(a_{k+1})\leqslant f'_d(a_{k+1})$.

Par suite, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\,f'_g(a_{k+1})=\int_a^x f'_g(t)\,dt$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\,f'_d(a_k)=\int_a^x f'_d(t)\,dt$,

on obtient que : $\displaystyle f(x)-f(a)=\int_a^x f'_d(t)\,dt=\int_a^x f'_g(t)\,dt$. □

Théorème 4.2.2

Soit $f:[a\,,\,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$.

De plus, si $\sigma_n=\left\{x_0=a\,,\,\ldots\,,\,x_k=a+k\,\dfrac{b-a}{n}\,,\,\ldots\,,\,x_n=b\right\}$ est la subdivision régulière d'ordre $n\in\mathbb{N}^*$ de $[a\,,\,b]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\,.$$

Pour démontrer ce résultat, on a besoin de rappeler le résultat classique suivant :

Proposition (Heine)

Soit $f:[a\,,\,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f est uniformément continue sur $[a\,,\,b]$, i.e. :

$$\forall\varepsilon>0\;\;,\;\;\exists\eta_\varepsilon>0\;\text{ tel que : }\forall t\,,\,t'\in[a\,,\,b]\,,\,|t-t'|\leqslant\eta_\varepsilon\Longrightarrow|f(t)-f(t')|\leqslant\varepsilon\,.$$

Preuve du théorème 2

La fonction $f:[a\,,\,b]\to\mathbb{R}$ étant continue sur $[a\,,\,b]$ est uniformément continue sur $[a\,,\,b]$ et vérifie la proposition précédente.

Soit $M\geqslant 0$ tel que : $\forall t\in[a\,,\,b]\,,\,|f(t)|\leqslant M$. Soient alors $\varepsilon>0$ et $N_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{N_\varepsilon}\leqslant\eta_\varepsilon$. Considérons la subdivision régulière σ_n d'ordre n de $[a\,,\,b]$. Pour tout entier $k\in[\![0\,,\,\ldots\,,\,n-1]\!]$, la fonction continue $f:[x_k\,,\,x_{k+1}]\to\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes :

$$m_k=\inf_{t\in[x_k\,,\,x_{k+1}]}f(t)=\min_{t\in[x_k\,,\,x_{k+1}]}f(t)\quad,\quad M_k=\sup_{t\in[x_k\,,\,x_{k+1}]}f(t)=\max_{t\in[x_k\,,\,x_{k+1}]}f(t)\;.$$

Ainsi, pour tout entier $n\geqslant N_\varepsilon$ et $k\in\{0\,,\,1\,,\,\ldots\,,\,n-1\}\,,\,M_k-m_k\leqslant\varepsilon\,.$

Considérons les fonctions étagées u_n et v_n définies par :

$$u_n(t)=\begin{cases}m_k & \text{si}\quad t\in[x_k\,,\,x_{k+1}[\;\;,\;\;k\in\{0\,,\,\ldots\,,\,n-1\}\\ f(b) & \text{si}\quad t=b\end{cases}$$

$$v_n(t)=\begin{cases}f(a) & \text{si}\quad t=a\\ M_k & \text{si}\quad t\in]x_k\,,\,x_{k+1}]\;\;,\;\;k\in\{0\,,\,\ldots\,,\,n-1\}\end{cases}\;.$$

On a alors pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$: u_n et v_n sont étagées sur $[a\,,\,b]$ et vérifient :

(i) $u_n\leqslant f\leqslant v_n$

(ii) $\displaystyle\int_a^b(v_n-u_n)(t)\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)(M_k-m_k)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(M_k-m_k)$

et, pour $n\geqslant N_\varepsilon$:

$$\int_a^b(v_n-u_n)(t)\,dt\;\leqslant\;\varepsilon\cdot\frac{b-a}{n}\cdot n=\varepsilon(b-a).$$

On en déduit que f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$ et que :

$$\int_a^b u_n(t)\,dt = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} m_k \quad\leqslant\quad \int_a^b f(t)\,dt \quad\leqslant\quad \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M_k \quad=\quad \int_a^b v_n(t)\,dt\,.$$

Par suite, puisque : $0 \leqslant \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b u_n(t)\,dt \leqslant \int_a^b (v_n - u_n)(t)\,dt \leqslant \varepsilon(b-a)\,,\; n \geqslant N_\varepsilon$, on a donc :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b u_n(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} m_k\,.$$

De même, $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b v_n(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M_k\,.$

Par ailleurs, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(\star)\quad \begin{cases} \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} m_k \leqslant \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leqslant \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} M_k \\[2ex] \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} m_k \leqslant \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leqslant \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} M_k \end{cases}.$$

On en déduit que l'on a aussi :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,.$$

□

Exemple.
Soit $f(t) = \sqrt{t}\,,\; t \in [0\,,\,1]$. La fonction f est continue sur $[0\,,\,1]$ et on déduit de ces théorèmes que :

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\,[\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}]\,.$$

On verra ultérieurement que la valeur de cette intégrale peut être calculée en utilisant une primitive de f sur $[0\,,\,1]$; ainsi $\int_0^1 \sqrt{t}\cdot dt = \frac{2}{3}$.

Exercice 3.2.4 *Calculer l'intégrale de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ obtenue comme limite de sommes de Riemann dans les cas suivants :*

1) $f(x) = \sin x$ *sur* $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2) $f(x) = \cos x$ *sur* $[0, \frac{\pi}{2}]$.

3) $f(x) = \alpha^x$ *sur* $[a,b]$ *(on prend* $\alpha > 0$*).*

Exercice 3.2.5 *Montrer que chacune des expressions mises en jeu ci-dessous peut s'interpréter comme une somme de Riemann. Identifier chaque fois la fonction qui permet une telle interprétation. Calculer alors les limites dont il est question.*

1) $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}$, *2)* $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}$,

3) $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$, *4)* $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Application 4.2.2 (Formule de Jensen)
Soient f une fonction continue strictement positive sur $[0\,,\,1]$ et g une fonction continue positive sur $[0\,,\,1]$ avec $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt = 1$. Alors :

$$\exp\left(\int_0^1 \ell n\,[f(t)]\cdot g(t)\,dt\right) \leqslant \int_0^1 f(t)\cdot g(t)\,dt\,.$$

En particulier, si $g \equiv 1$, on a :

$$\exp\left(\int_0^1 \ell n\,[f(t)]\,dt\right) \leqslant \int_0^1 f(t)\,dt\,.$$

Preuve
Le théorème 2 permet d'écrire que :

$$(1) \qquad \int_0^1 \ell n\,[f(t)]\cdot g(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ell n\left[f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\cdot g\left(\frac{k}{n}\right).$$

$$(2) \qquad \int_0^1 f(t)\cdot g(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot g\left(\frac{k}{n}\right).$$

$$(3) \qquad 1 = \int_0^1 g(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right).$$

Par suite, pour n assez grand, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) > 0$ et on peut considérer $\alpha_k := \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} g\left(\frac{\ell}{n}\right)}\cdot g\left(\frac{k}{n}\right)$, $k \in [\![1\,,\,\ldots\,,\,n]\!]$.

Posons aussi $a_k := f\left(\dfrac{k}{n}\right)$; on a alors : $a_k > 0\,,\ \alpha_k \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$.
La fonction $-\,\ell n$ étant convexe sur $]0\,,\,+\infty[$, on a donc :

$$(\star) \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\cdot \ell n\,(a_k) \leqslant \ell n\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\cdot a_k\right) = v_n$$

Or, d'après (1) et (3) :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{\frac{1}{n}\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} g\left(\frac{\ell}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ell n\left[f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\cdot g\left(\frac{k}{n}\right)\right]\\ &= \int_0^1 \ell n\,[f(t)]\cdot g(t)\,dt\end{aligned}$$

et, d'après (2) et (3) :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \exp(v_n) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\cdot a_k\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{\frac{1}{n}\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} g\left(\frac{\ell}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot g\left(\frac{k}{n}\right)\right]\\ &= \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

La fonction exp étant croissante et continue, on déduit le résultat cherché à partir de l'inégalité $(\star)$. $\square$

Remarque
Considérons une somme de Riemann générale :

$$\sigma_n(f\,,\,\xi) := \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)$$

associée à la fonction f, à la subdivision régulière σ_n et au n-uplet de points $\xi = (\xi_0\,,\,\ldots\,,\,\xi_{n-1})$. Reprenant les démonstrations des théorèmes 1 et 2, il résulte que l'on a encore :

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n(f\,,\,\xi) = \int_a^b f(t)\,dt$$

pour f monotone croissante car on a :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leqslant \sigma_n(f\,,\,\xi) \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

et, pour f continue sur $[a\,,\,b]$, car :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} m_k \leqslant \sigma_n(f\,,\,\xi) \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M_k\,.$$

Par exemple, si $f(t) = \sqrt{t}\,,\ t \in [0\,,\,1]$, en choisissant $\xi = (\xi_0\,,\,\ldots\,,\,\xi_{n-1})$ tel que : $\xi_k = \dfrac{1}{2}\,(x_{k+1}+x_k)$, on obtient :

$$\frac{2}{3} = \int_0^1 \sqrt{t}\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k+\frac{1}{2}}\,.$$

<u>Un</u> <u>contre</u>-<u>exemple</u> : une fonction de type "peigne".
Considérons la fonction $f : [0\,,\,1] \to \mathbb{R}$ définie par : $f(t) = 1$ si $t \in \mathbb{Q} \cap [0\,,\,1]$ et $f(t) = 0$ si $t \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0\,,\,1]$. Cette fonction n'est pas Riemann-intégrable sur $[0\,,\,1]$. En effet, s'il en était ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existerait deux fonctions en escalier $u_\varepsilon\,,\ v_\varepsilon$ sur $[0\,,\,1]$ telles que :

(i) $u_\varepsilon \leqslant f \leqslant v_\varepsilon$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 (v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t)\,dt \leqslant \varepsilon.$

Soit $\sigma_\varepsilon = \{x_0\,,\,\ldots\,,\,x_{N_\varepsilon} = 1\}$ une subdivision adaptée à u_ε et v_ε (ce qui est toujours possible). Il résulte des inégalités (i) que, pour tout entier $k \in \{0\,,\,\ldots\,,\,N_\varepsilon - 1\}$ et pour tout réel $t \in]x_k\,,\,x_{k+1}[$, on doit avoir $u_\varepsilon(t) \leq 0$ et $v_\varepsilon(t) \geq 1$ car d'une part $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap]x_k\,,\,x_{k+1}[\neq \varnothing$ et d'autre part $\mathbb{Q} \cap]x_k\,,\,x_{k+1}[\neq \varnothing$.
Par suite : $\displaystyle\int_0^1 u_\varepsilon(t)\,dt \leq 0$ et $\displaystyle\int_0^1 v_\varepsilon(t)\,dt \geq 1$. L'inégalité (ii) ne peut donc pas avoir lieu dès que $\varepsilon < 1$.

Propriétés de l'intégrale

Les propriétés de l'intégrale des fonctions étagées sur $[a\,,\,b]$ (qui sont énoncées en Proposition 4.1.2) se généralisent aux fonctions Riemann-intégrables sur $[a\,,\,b]$ comme suit :

Proposition 4.2.1.
Soient $f\,,\,g \in \mathcal{R}([a\,,\,b])$. Alors :

(i) $f + g \in \mathcal{R}([a\,,\,b])$ et $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt.$

(ii) Pour tout réel λ, $\lambda \cdot f \in \mathcal{R}([a\,,\,b])$ et $\displaystyle\int_a^b (\lambda \cdot f)(t)\,dt = \lambda \cdot \int_a^b f(t)\,dt$.

(iii) Si $f \geqslant g$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant \int_a^b g(t)\,dt$.

(iv) Si $f = g$ sauf en un nombre fini de points de $[a\,,\,b]$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$.

(v) Pour tout $c \in]a\,,\,b[$, on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$.
Ci-dessus, la quantité $\int_a^c f(t)\,dt$ $\big($resp. $\int_c^b f(t)\,dt\big)$ désigne l'intégrale de la restriction de f au segment $[a\,,\,c]$ (resp. $[c\,,\,b]$). Cette relation s'appelle *relation de Chasles* pour les éléments de $\mathcal{R}([a\,,\,b])$.

Preuve

(i) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe u_ε, v_ε, u'_ε, v'_ε étagées sur $[a\,,\,b]$ telles que :

$$u_\varepsilon \leqslant f \leqslant v_\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_a^b (v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t)\,dt \leqslant \varepsilon$$

$$u'_\varepsilon \leqslant g \leqslant v'_\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_a^b (v'_\varepsilon - u'_\varepsilon)(t)\,dt \leqslant \varepsilon\,.$$

On en déduit que : $(u_\varepsilon + u'_\varepsilon) \leqslant f + g \leqslant (v_\varepsilon + v'_\varepsilon)$ et $\displaystyle\int_a^b [(v_\varepsilon + v'_\varepsilon) - (u_\varepsilon + u'_\varepsilon)](t)\,dt \leqslant 2\varepsilon$ d'après les propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{E}([a\,,\,b])$. Par suite, $f+g$ est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$ et des inégalités :

$$\int_a^b u_\varepsilon(t)\,dt \quad \leqslant \quad \int_a^b f(t)\,dt \quad \leqslant \quad \int_a^b v_\varepsilon(t)\,dt$$

$$\int_a^b u'_\varepsilon(t)\,dt \quad \leqslant \quad \int_a^b g(t)\,dt \quad \leqslant \quad \int_a^b v'_\varepsilon(t)\,dt$$

on obtient que :

$$\int_a^b (u_\varepsilon + u'_\varepsilon)(t)\,dt \quad \leqslant \quad \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt \quad \leqslant \quad \int_a^b (v_\varepsilon + v'_\varepsilon)(t)\,dt$$

et comme :

$$\int_a^b (u_\varepsilon + u'_\varepsilon)(t)\,dt \quad \leqslant \quad \int_a^b (f+g)(t)\,dt \quad \leqslant \quad \int_a^b (v_\varepsilon + v'_\varepsilon)(t)\,dt$$

on déduit que :

$$\left|\int_a^b (f+g)(t)\,dt - \left(\int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt\right)\right| \quad \leqslant \quad \int_a^b [(v_\varepsilon + v'_\varepsilon) - (u_\varepsilon + u'_\varepsilon)](t)\,dt \quad \leqslant \quad 2\varepsilon\,.$$

Par suite, $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.

(ii) Se démontre de manière analogue.

(iii) Compte-tenu de (i) et (ii), il suffit de montrer que si f est positive ou nulle, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$. Or si $u \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$ vérifie $u \leqslant f$ alors la fonction u_+ définie par : $u_+(t) = \max(u(t)\,,\,0)$, $t \in [a\,,\,b]$, est encore étagée sur $[a\,,\,b]$ et vérifie $u_+ \leqslant f$. Par suite, de la définition de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, on obtient que $0 \leqslant \displaystyle\int_a^b u_+(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)\,dt$, d'où le résultat.

(iv) Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a\,,\,b]$ telles que $f = g$ sauf en un nombre fini de points de $[a\,,\,b]$. En posant $h = f - g$, d'après (i) h est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$ et nulle sauf en un nombre fini de points. On doit montrer que $\displaystyle\int_a^b h(t)\,dt = 0$. Or une telle fonction $h \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$ et, d'après la relation de Chasles, il est immédiat que $\displaystyle\int_a^b h(t)\,dt = 0$.

(v) Soit $c \in]a\,,\,b[$. Notons f_1 et f_2 les restrictions de f aux segments $[a\,,\,c]$ et $[c\,,\,b]$. On va montrer que f_1 et f_2 sont Riemann-intégrables sur $[a\,,\,c]$ et $[c\,,\,b]$ respectivement. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions $u_\varepsilon\,,\,v_\varepsilon \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$ telles que :

$$u_\varepsilon \;\leqslant\; f \;\leqslant\; v_\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t)\,dt \;\leqslant\; \varepsilon\,.$$

Notons $u_\varepsilon^1\,,\,v_\varepsilon^1$ et $u_\varepsilon^2\,,\,v_\varepsilon^2$ les restrictions de $u_\varepsilon\,,\,v_\varepsilon$ aux segments $[a\,,\,c]$ et $[c\,,\,b]$. On a donc : $u_\varepsilon^1\,,\,v_\varepsilon^1 \in \mathcal{E}([a\,,\,c])$ et $u_\varepsilon^2\,,\,v_\varepsilon^2 \in \mathcal{E}([c\,,\,b])$ et :

$$u_\varepsilon^1 \;\leqslant\; f_1 \;\leqslant\; v_\varepsilon^1 \;\text{ sur } [a\,,\,c] \qquad \text{et} \qquad u_\varepsilon^2 \;\leqslant\; f_2 \;\leqslant\; v_\varepsilon^2 \;\text{ sur } [c\,,\,b]\,.$$

En outre :

$$\begin{aligned}\int_a^b (v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t)\,dt &= \int_a^c (v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t)\,dt + \int_c^b (v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t)\,dt\\ &= \int_a^c (v_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^1)(t)\,dt + \int_c^b (v_\varepsilon^2 - u_\varepsilon^2)(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

On en déduit (puisque $\displaystyle\int_a^c (v_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^1)(t)\,dt \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_c^b (v_\varepsilon^2 - u_\varepsilon^2)(t)\,dt \geqslant 0$) que :

$$\int_a^c (v_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^1)(t)\,dt \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \int_c^b (v_\varepsilon^2 - u_\varepsilon^2)(t)\,dt \leqslant \varepsilon\,.$$

Par suite, f_1 et f_2 sont Riemann-Intégrables sur $[a\,,\,c]\,,\,[c\,,\,b]$ respectivement.
Et, des inégalités :

$$\begin{aligned}\int_a^c u_\varepsilon^1(t)\,dt \;&\leqslant\; \int_a^c f_1(t)\,dt \;\leqslant\; \int_a^c v_\varepsilon^1(t)\,dt\\ \int_c^b u_\varepsilon^2(t)\,dt \;&\leqslant\; \int_c^b f_2(t)\,dt \;\leqslant\; \int_c^b v_\varepsilon^2(t)\,dt\end{aligned}$$

on déduit que :

$$\int_a^b u_\varepsilon(t)\,dt \;\leqslant\; \int_a^c f_1(t)\,dt + \int_c^b f_2(t)\,dt \;\leqslant\; \int_a^b v_\varepsilon(t)\,dt$$

et, conmme on a aussi :

$$\int_a^b u_\varepsilon(t)\,dt \;\leqslant\; \int_a^b f(t)\,dt \;\leqslant\; \int_a^b v_\varepsilon(t)\,dt$$

on obtient que :

$$\left|\int_a^b (f)(t)\,dt - \left(\int_a^c f_1(t)\,dt + \int_c^b f_2(t)\,dt\right)\right| \;\leqslant\; \int_a^b v_\varepsilon(t)\,dt - \int_a^b u_\varepsilon(t)\,dt \;\leqslant\; \varepsilon\,.$$

□

Exercice 3.2.6 *Soit $f\,:\,[a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. On pose $m := \sup\{f(x)\,;\,x \in [a,b]\}$. Prouver que :*

$$\lim_{n\to\infty} \;\left(\int_a^b f(x)^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}} \;=\; m\,.$$

Exercice 3.2.7 *Soit $f\,:\,[0,1]\to\mathbb{R}$ une application strictement croissante telle que $f(0)=0$ et $f(1)=1$. Calculer :*

$$\lim_{n\to\infty}\quad\int_0^1 f(x)^n\,dx\,.$$

Exercice 3.2.8 *Soit $f\,:\,[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^1 f(t)^n\,dt$ ne prenne qu'un nombre fini de valeurs lorsque n décrit $\mathbb{N}$.*

1) Montrer que $\int_0^1 f(t)^{2n}\,dt$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs lorsque n décrit $\mathbb{N}$.

2) On suppose qu'il existe $\bar{t}\in[0,1]$ tel que $f(\bar{t})^2>1$. Trouver une contradiction.

3) On suppose que $f^2\,:\,[0,1]\to[0,1]$ est différente de $f^2\equiv 0$ et $f^2\equiv 1$. En examinant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue en posant $u_n=\int_0^1 f(t)^{2n}\,dt$, trouver une contradiction.

4) Déduire de ce qui précède que $f\equiv -1$ ou $f\equiv 0$ ou bien $f\equiv 1$.

En fait, le point (v) de la Proposition 1 admet une réciproque :

Proposition 4.2.2.
Soient $a<c<b$ trois nombres réels, et soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a\,,\,c]$ et sur $[c\,,\,b]$. Alors, f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$ et on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^c f(t)\,dt+\int_c^b f(t)\,dt\,.$$

Preuve
Il suffit, d'après la proposition précédente, de montrer que f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$.
Soit $\varepsilon>0$. Les restrictions f_1 et f_2 de f à $[a\,,\,c]$ et $[c\,,\,b]$ étant Riemann-intégrables, il existe $u_\varepsilon^1\,,\,v_\varepsilon^1\in\mathcal{E}([a\,,\,c])\,,\,u_\varepsilon^2\,,\,v_\varepsilon^2\in\mathcal{E}([c\,,\,b])$ telles que :

$$u_\varepsilon^1\;\leqslant\;f_1\;\leqslant\;v_\varepsilon^1\qquad,\qquad\int_a^c(v_\varepsilon^1-u_\varepsilon^1)(t)\,dt\;\leqslant\;\varepsilon$$

et

$$u_\varepsilon^2\;\leqslant\;f_2\;\leqslant\;v_\varepsilon^2\qquad,\qquad\int_c^b(v_\varepsilon^2-u_\varepsilon^2)(t)\,dt\;\leqslant\;\varepsilon\,.$$

Soient $u_\varepsilon\,,\,v_\varepsilon\in\mathcal{E}([a\,,\,b])$ définies par :

$$u_\varepsilon(t)=\begin{cases}u_\varepsilon^1 & \text{si}\quad t\in[a\,,\,c]\\ u_\varepsilon^2 & \text{si}\quad t\in\,]c\,,\,b]\end{cases}$$

$$v_n(t)=\begin{cases}v_\varepsilon^1 & \text{si}\quad t\in[a\,,\,c]\\ v_\varepsilon^2 & \text{si}\quad t\in\,]c\,,\,b]\end{cases}\,.$$

On a donc : $u_\varepsilon\leqslant f\leqslant v_\varepsilon$ sur $[a\,,\,b]$. De plus, grâce à la relation de Chasles on a :

$$\int_a^b u_\varepsilon(t)\,dt\;=\;\int_a^c u_\varepsilon^1(t)\,dt+\int_c^b u_\varepsilon^2(t)\,dt$$

$$\int_a^b v_\varepsilon(t)\,dt\;=\;\int_a^c v_\varepsilon^1(t)\,dt+\int_c^b v_\varepsilon^2(t)\,dt\,.$$

Par suite, $\displaystyle\int_a^b(v_\varepsilon-u_\varepsilon)(t)\,dt\leqslant 2\varepsilon$, ce qui prouve que f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$. $\square$

Afin d'étendre cette relation de Chasles au cas où les réels a , b et c sont dans un ordre quelconque, on conviendra de poser, pour f Riemann-intégrable sur un segment $[a\,,\,b]$, $\displaystyle\int_\beta^\alpha f(t)\,dt = -\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ si $\alpha\,,\,\beta\in[a\,,\,b]$ avec $\alpha<\beta$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = 0$ si $\alpha=\beta$.

Avec cette convention, il résulte des propositions 1 et 2 :

Proposition 4.2.3 *Relation de Chasles.*
Soient $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable et $\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma$ trois points de $[a\,,\,b]$. Alors on a :

$$\int_\alpha^\gamma f(t)\,dt \;=\; \int_\alpha^\beta f(t)\,dt + \int_\beta^\gamma f(t)\,dt\,.$$

Preuve
Traitons par exemple le cas $\alpha<\gamma<\beta$. D'après la proposition 1, les restrictions de f aux segments $[\alpha\,,\,\gamma]$, $[\alpha\,,\,\beta]$ et $[\gamma\,,\,\beta]$ sont Riemann-intégrables et d'après la proposition 2 :

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt \;=\; \int_\alpha^\gamma f(t)\,dt + \int_\gamma^\beta f(t)\,dt$$

i.e. :

$$\int_\alpha^\gamma f(t)\,dt \;=\; \int_\alpha^\beta f(t)\,dt - \int_\gamma^\beta f(t)\,dt$$

et, d'après la convention adaptée :

$$= \int_\alpha^\beta f(t)\,dt + \int_\beta^\gamma f(t)\,dt\,.$$

□

Autres exemples de fonctions Riemann-intégrables : les fonctions continues par morceaux

Définition 4.2.4 - *Fonction continue par morceaux.*
On dit qu'une fonction $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = \{x_0 = a\,,\,x_1\,,\,\dots\,,\,x_n = b\}$ de $[a\,,\,b]$ telle que la restriction de f aux intervalles $]x_i\,,\,x_{i+1}[$ soit continue et admette une limite à gauche en x_i et une limite à droite en $x_{i+1}\,,i\in\{0\,,\,\dots\,,\,(n-1)\}$ (i.e. : que $f\,|_{]x_i\,,\,x_{i+1}[} = f_i\,|_{]x_i\,,\,x_{i+1}[}$ avec $f_i : [x_i\,,\,x_{i+1}]$ continue). △

Il résulte alors de ce qui précède que :

Proposition 4.2.4.
Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Alors, f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$ et, si $\sigma = \{x_0 = a\,,\,\dots\,,\,x_n = b\}$ est une subdivision adaptée à f, $f_i : [x_i\,,\,x_{i+1}] \to \mathbb{R}$ un prolongement continu de f à $[x_i\,,\,x_{i+1}]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i(t)\,dt\,.$$

Exemple
Soit $t \longmapsto f(t) = E(t) : [0\,,\,3] \to \mathbb{R}$ où $E(t)$ désigne la partie entière du réel t. Alors f est continue par morceaux sur $[0\,,\,3]$, et son intégrale $\displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt$ est égale à 3.

Exercice 3.2.9 *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue par morceaux. Trouver une suite* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions en escaliers telle que :*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^1 f(t)\ g_n(t)\ dt \ = \ f(0+)\,.$$

Proposition 4.2.5 - *Propriété de la moyenne.*
Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable, et soient $m\,,\,M \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall t \in [a\,,\,b] \qquad , \qquad m \leqslant f(t) \leqslant M\,.$$

Alors :

$$m(b-a) \quad \leqslant \quad \int_a^b f(t)\,dt \quad \leqslant \quad M(b-a)\,.$$

Preuve
Cela résulte immédiatement du point (iii) de la proposition avec $g(t) = m$ et $h(t) = M$, $t \in [a\,,\,b]$.

$\square$

Remarque
Si f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$, on sait que f est alors bornée sur $[a\,,\,b]$ et on peut prendre $m = \inf\limits_{t\in[a\,,\,b]} f(t)$ et $M = \sup\limits_{t\in[a\,,\,b]} f(t)$.

Dans le cas particulier où $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est continue, on peut préciser davantage ce résultat :

Proposition 4.2.6 - *Formule de la moyenne.*
Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, il existe $c \in [a\,,\,b]$ tel que :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt \ = \ f(c)\,.$$

Preuve
La fonction f étant continue sur le segment $[a\,,\,b]$ est bornée sur $[a\,,\,b]$ et atteint ses bornes.
Soient $m = \inf\limits_{t\in[a\,,\,b]} f(t) = f(c_1)$ et $M = \sup\limits_{t\in[a\,,\,b]} f(t) = f(c_2)\,,\, c_1\,,\, c_2 \in [a\,,\,b]$. Par suite, d'après la proposition précédente, le nombre $\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ appartient au segment $[m\,,\,M] = [f(c_1)\,,\, f(c_2)]$. Et, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [c_1\,,\,c_2] \subset [a\,,\,b]$ tel que : $\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = f(c)$.

$\square$

Autres propriétés de l'intégrale

Il résulte de la proposition 1 que $\mathcal{R}([a\,,\,b])$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que l'application $f \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$: $\mathcal{R}([a\,,\,b]) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire.
Il résulte aussi de cette même proposition que l'on a :

Théorème 4.2.3.
Soient $f\,,\,g \in \mathcal{R}([a\,,\,b])$. Alors $\max(f\,,\,g)$ et $\min(f\,,\,g)$ sont Riemann-intégrables sur $[a\,,\,b]$ et on a :

$$\max\left(\int_a^b f(t)\,dt\ ,\ \int_a^b g(t)\,dt\right) \quad \leqslant \quad \int_a^b \max(f(t)\,,\,g(t))\,dt$$

$$\min\left(\int_a^b f(t)\,dt\ ,\ \int_a^b g(t)\,dt\right) \quad \geqslant \quad \int_a^b \min(f(t)\,,\,g(t))\,dt.$$

Preuve
Tout d'abord, il est facile de vérifier que si $\alpha\,,\,\beta$ sont deux nombres réels alors :

$$\max(\alpha\,,\,\beta) = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{|\alpha-\beta|}{2} \qquad \text{et} \qquad \min(\alpha\,,\,\beta) = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{|\alpha-\beta|}{2}\,.$$

En particulier, on a :

$$\max(f\,,\,g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} = g + \frac{f-g}{2} + \frac{|f-g|}{2} = g + \max(f-g\,,\,0)$$

et

$$\min(f\,,\,g) = -\,\max(-\,f\,,\,-g)\,.$$

Il suffit donc de montrer que si $f \in \mathcal{R}([a\,,\,b])$, alors $f^+ = \max(f\,,\,0) \in \mathcal{R}([a\,,\,b])$.
Or si f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_\varepsilon\,,\,v_\varepsilon \in \mathcal{E}([a\,,\,b])$ telles que :

$$u_\varepsilon \ \leqslant\ f \ \leqslant\ v_\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t)\,dt \ \leqslant\ \varepsilon\,.$$

Les fonctions $u_\varepsilon^+ = \max(u\,,\,0)$ et $v_\varepsilon^+ = \max(v_\varepsilon\,,\,0)$ sont encore étagées sur $[a\,,\,b]$ et vérifient :

$$u_\varepsilon^+ \ \leqslant\ f^+ \ \leqslant\ v_\varepsilon^+ \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (v_\varepsilon^+ - u_\varepsilon^+)(t)\,dt \ \leqslant\ \varepsilon$$

car :

$$v_\varepsilon^+ - u_\varepsilon^+ = \frac{1}{2}\,(v_\varepsilon - u_\varepsilon) + \frac{1}{2}\,(|v_\varepsilon| - |u_\varepsilon|)$$

et

$$|v_\varepsilon| - |u_\varepsilon| \ \leqslant\ \big||v_\varepsilon| - |u_\varepsilon|\big| \ \leqslant\ |v_\varepsilon - u_\varepsilon| \ =\ v_\varepsilon - u_\varepsilon$$

d'où : $v_\varepsilon^+ - u_\varepsilon^+ \leqslant v_\varepsilon - u_\varepsilon$. Par suite, f^+ est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$.

□

Remarque
Il résulte des expressions $\max(f\,,\,g)$ et $\min(f\,,\,g)$ données dans cette démonstration que si f et g sont continues en un point $t_0 \in [a\,,\,b]$, il en est de même de $\max(f\,,\,g)$ et $\min(f\,,\,g)$.

Corollaire 4.2.1.
Si f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$, alors $|f|$ est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$ et, de plus :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \ \leqslant\ \int_a^b |f(t)|\,dt\,.$$

Preuve
Comme $|f| = f^+ + f^-$, où $f^- = -\,\min(f\,,\,0)$, il résulte du théorème précédent que si $f \in \mathcal{R}([a\,,\,b])$, alors $|f| \in \mathcal{R}[a\,,\,b]$. Par ailleurs, puisque $-\,|f| \leqslant f \leqslant |f|$, on obtient que :

$$-\int_a^b |f|(t)\,dt \ \leqslant\ \int_a^b f(t)\,dt \ \leqslant\ \int_a^b |f|(t)\,dt$$

c'est-à-dire :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \ \leqslant\ \int_a^b |f|(t)\,dt\,.$$

□

Un contre-exemple
Soit $f : [0\,,\,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$f(t) = 1 \qquad \text{si} \;\; t \in \mathbb{Q} \cap [0\,,\,1]$
$f(t) = -1 \quad \text{si} \;\; t \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0\,,\,1]$.
Alors f n'est pas Riemann-intégrable sur $[0\,,\,1]$, et cependant $|f| \equiv 1$ est Riemann-intégrable sur $[0\,,\,1]$.

On a déjà remarqué que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$ pour f Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$ n'implique pas $f \equiv 0$ sur $[a\,,\,b]$. Cependant, si f est continue on a :

Corollaire 4.2.2.
Si f est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$, alors on a : $\forall \varepsilon > 0\,, \exists f_\varepsilon$, en escalier sur $[a\,,\,b]$, telle que :

$$\int_a^b |(f - f_\varepsilon)(t)|\,dt \;\leqslant\; \varepsilon$$

Preuve
En effet, f étant Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier sur $[a\,,\,b]$, u_ε et v_ε , telles que :

(i) $\quad u_\varepsilon \leqslant f \leqslant v_\varepsilon$
(ii) $\quad \displaystyle\int_a^b (v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t)\,dt \leqslant \varepsilon$

Posons $f_\varepsilon := v_\varepsilon$, alors $|f - f_\varepsilon| = v_\varepsilon - f \leqslant v_\varepsilon - u_\varepsilon$ et donc : $\displaystyle\int_a^b |(f - f_\varepsilon(t)|\,dt \leqslant \varepsilon$.

□

Applications
Soit f une fonction continue sur $[a\,,\,b]$. Alors :

(1) $\quad$ Lemme de Riemann-Lebesgue : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cdot\cos(nt)\,dt = 0$

(2) $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\,|\sin nt|\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\,|\cos(nt)|\,dt = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t)\,dt$

Preuve de (1)
f étant continue, la fonction $t \longmapsto f(t)\cdot\sin nt \,:\, [a\,,\,b] \to \mathbb{K}$ est aussi continue, donc Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$; $\displaystyle\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\,dt$ a bien un sens. Pour la suite de la démonstration, on a besoin de connaître les valeurs des intégrales suivantes (les calculs correspondants seront expliqués et justifiés au paragraphe 4.4) :

$$\int_a^b \sin(nt)\,dt \;=\; \frac{1}{n}\,\big[\cos(na) - \cos(nb)\big]\,, \qquad \int_a^b \cos(nt)\,dt \;=\; \frac{1}{n}\,\big[\sin(nb) - \sin(na)\big]\,.$$

Tout d'abord, comme on le verra au paragraphe 4 suivant (corollaire 1), pour tout $\alpha \leqslant \beta$, on a :

$$\left|\int_\alpha^\beta \sin nt\,dt\right| = \left|\frac{1}{n}\,[\cos n\,\alpha - \cos n\,\beta]\right| \leqslant \frac{2}{n}\,.$$

1ère étape
Si f est constante (égale à λ) sur $[a\,,\,b]$, on a :

$$\left|\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\,dt\right| = \left|\lambda\cdot\int_a^b \sin nt\,dt\right| \leqslant |\lambda|\cdot\frac{2}{n} \to 0 \quad \text{, quand } n \to +\infty.$$

2ème étape

Si f est en escalier sur $[a\,,\,b]$, alors :

$$\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\,dt = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i\cdot\int_{x_i}^{x_{i+1}}\sin nt\,dt \to 0 \quad \text{, quand } n\to+\infty.$$

<u>3ème étape</u>

On applique le corollaire 2, on approche f par des fonctions en escalier.

Soient $\varepsilon>0$ et f_ε , en escalier sur $[a\,,\,b]$ telle que : $\displaystyle\int_a^b |(f-f_\varepsilon)(t)|\,dt \leqslant \varepsilon$.

Par suite :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\cdot\sin(nt)\,dt\right| &\leqslant \left|\int_a^b (f-f_\varepsilon)(t)\cdot\sin(nt)\,dt\right| + \left|\int_a^b f_\varepsilon(t)\cdot\sin(nt)\,dt\right| \\ &\leqslant \varepsilon + \left|\int_a^b f_\varepsilon(t)\cdot\sin(nt)\,dt\right|\end{aligned}$$

Il résulte de la 2ème étape que : il existe $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant N_\varepsilon \Longrightarrow \left|\displaystyle\int_a^b f_\varepsilon(t)\cdot\sin nt\,dt\right| \leqslant \varepsilon$.

Finalement, pour $n\geqslant N_\varepsilon$, $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\cdot\sin nt\,dt\right| \leqslant 2\varepsilon$, d'où (1).

Preuve de (2)

On procède comme précédemment.

<u>1ère étape</u>

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b |\sin nt|\,dt \;=\; \frac{2}{\pi}\,(b-a)$$

En effet, pour n assez grand, désignons par $k_0=k_0(n)$ et $k_1=k_1(n)$ les entiers relatifs tels que :

$$(k_0-1)\,\frac{\pi}{n} \;<\; a \;\leqslant\; k_0\,\frac{\pi}{n} \;<\; k_1\,\frac{\pi}{n} \;\leqslant\; b \;<\; (k_1+1)\,\frac{\pi}{n}$$

Alors, pour $k\in[\![k_0\,,\,k_1-1]\!]$, la fonction $t\longmapsto\sin nt$ garde un signe constant sur chaque intervalle $\left]k\,\frac{\pi}{n}\,,\,(k+1)\,\frac{\pi}{n}\right[$,

et donc : $\displaystyle\int_{k\,\frac{\pi}{n}}^{(k+1)\,\frac{\pi}{n}} |\sin nt|\,dt = \frac{2}{n}$.

Par suite $\displaystyle\int_{k_0\,\frac{\pi}{n}}^{k_1\,\frac{\pi}{n}} |\sin nt|\,dt = \frac{2}{n}\,(k_1-k_0)$.

Comme $|\sin nt|\leqslant 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\Big(k_0(n)\,\frac{\pi}{n}-a\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(b-k_1(n)\,\frac{\pi}{n}\Big) = 0$, on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{k_1(n)-k_0(n)}{n} \;=\; \frac{b-a}{\pi} \qquad\text{et}\qquad \lim_{n\to+\infty}\int_a^b |\sin nt|\,dt \;=\; \frac{2}{\pi}\,(b-a)$$

<u>2ème étape</u>

Si f est en escalier sur $[a\,,\,b]$, on peut écrire :

$$\int_a^b f(t)\cdot|\sin nt|\,dt \;=\; \sum_{i=1}^{N}\lambda_i\cdot\int_{x_i}^{x_{i+1}}|\sin nt|\,dt$$

et donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cdot|\sin nt|\,dt \;=\; \sum_{i=1}^{N}\lambda_i\,\frac{2}{\pi}\,(x_{i+1}-x_i) \;=\; \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt$

3ème étape

On approche f par des fonctions en escalier au sens du corollaire 2.

Soient $\varepsilon > 0$ et f_ε, en escalier sur $[a\,,\,b]$ telle que : $\displaystyle\int_a^b |(f - f_\varepsilon)(t)|\,dt \leqslant \varepsilon$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\cdot|\sin nt|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt\right| &\leqslant \int_a^b |(f - f_\varepsilon)(t))|\,|\sin nt|\,dt \\
&\quad + \left|\int_a^b f_\varepsilon(t)\cdot|\sin nt|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b f_\varepsilon(t)\,dt\right| + \frac{2}{\pi}\int_a^b |(f - f_\varepsilon)(t)|\,dt \\
&\leqslant \varepsilon\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) + \left|\int_a^b f_\varepsilon(t)\cdot|\sin nt|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b f_\varepsilon(t)\,dt\right|
\end{aligned}$$

D'après la seconde étape, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant \mathbb{N}$ implique :

$$\left|\int_a^b f_\varepsilon(t)\cdot|\sin nt|\,dt \;-\; \frac{2}{\pi}\int_a^b f_\varepsilon(t)\,dt\right| \;\leqslant\; \varepsilon$$

d'où, pour $n \geqslant N_\varepsilon$: $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\cdot|\sin nt|\,dt \;-\; \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt\right| \;\leqslant\; 2\varepsilon\left(1 + \frac{2}{\pi}\right)$.

□

Proposition 4.2.7.

Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive ou nulle, i.e. : $\forall t \in [a\,,\,b]\,,\; f(t) \geqslant 0$.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$ équivaut à $f \equiv 0$ sur $[a\,,\,b]$, i.e. : $\forall t \in [a\,,\,b]\,,\; f(t) = 0$.

Preuve

On va déduire ce résultat de la relation de Chasles.

Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$, continue, positive ou nulle et non identiquement nulle. On va montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt > 0$.

Puisque f n'est pas identiquement nulle sur $[a\,,\,b]$, il existe $c \in [a\,,\,b]$ tel que $f(c) > 0$ et, puisque f est continue sur $[a\,,\,b]$, on peut toujours supposer que $c \in\,]a\,,\,b[$. La continuité de f au point c signifie :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\;,\;\; \exists \eta_\varepsilon > 0 \;\;\text{tel que : }\; |t - c| \leqslant \eta_\varepsilon \;\;,\;\; t \in [a\,,\,b] \quad\Longrightarrow\quad |f(t) - f(c)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Choisissons $0 < \varepsilon < \dfrac{f(c)}{2}$ et $\eta_\varepsilon > 0$ assez petit de sorte que $[c - \eta_\varepsilon\,,\,c + \eta_\varepsilon] \subset [a\,,\,b]$.

Alors pour $|t - c| \leqslant \eta_\varepsilon$, on a : $\dfrac{f(c)}{2} \leqslant f(c) - \varepsilon \leqslant f(t)$. Par suite, puisque $f \geqslant 0$:

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; \int_a^{c-\eta_\varepsilon} + \int_{c-\eta_\varepsilon}^{c+\eta_\varepsilon} + \int_{c+\eta_\varepsilon}^b f(t)\,dt \;\geqslant\; \int_{c-\eta_\varepsilon}^{c+\eta_\varepsilon} f(t)\,dt \;\geqslant\; \frac{f(c)}{2}\cdot(2\eta_\varepsilon) \;>\; 0\,.$$

□

Exercice 3.2.10 *Déterminer toutes les fonctions continues $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient :*

$$\int_a^b f(t)\;dt \;=\; (b - a)\sup_{t\in[a,b]}|f(t)|\,.$$

Exercice 3.2.11 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a, b]$ (avec $a < b$).*

1) On suppose que f est continue en un point $x_0 \in [a, b]$ en lequel $f(x_0) > 0$. Montrer qu'il existe un couple de points $(\tilde{a}, \tilde{b}) \in [a, b]^2$ avec $\tilde{a} \leq x_0 \leq \tilde{b}$ et $\tilde{b} - \tilde{a} > 0$ ajusté de façon à ce que $\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(x)\,dx > 0$.

2) En déduire que si f est continue positive sur $[a,b]$ et telle que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ alors f est identiquement nulle.

3) On suppose que f est continue sur $[a,b]$ avec $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

4) On suppose que f est continue sur $[0,1]$ avec $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $d \in [0,1]$ tel que $f(d) = d$.

Exercice 3.2.12 *Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^\pi f(u)\ \cos u\ du = \int_0^\pi f(u)\ \sin u\ du = 0$. Prouver que f s'annule au moins deux fois sur l'intervalle ouvert $]0,\pi[$.*

Proposition 4.2.8 - *Inégalité de Cauchy-Schwarz.*
Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a\,,\,b]$ et à valeurs réelles. On a :

$$(\star) \qquad \left|\int_a^b [f(t)\ g(t)]\,dt\right|^2 \ \leqslant\ \left(\int_a^b |f|^2(t)\,dt\right)\cdot\left(\int_a^b |g(t)|^2\,dt\right).$$

De plus, si $f \not\equiv 0$, il y a égalité dans $(\star)$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $g = \lambda \cdot f$.

Preuve
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $t \longmapsto [\lambda\, f(t) - g(t)]^2 : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ est continue et positive ou nulle et donc :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad , \quad \int_a^b [\lambda\, f(t) - g(t)]^2\,dt \geqslant 0$$

i.e. : $\forall \lambda \in \mathbb{R}\,,\ \lambda^2\, I - 2\lambda\, J + K \geqslant 0$
où $I = \displaystyle\int_a^b |f(t)|^2\,dt$, $J = \displaystyle\int_a^b [f(t)\ g(t)]\,dt$ et $K = \displaystyle\int_a^b |g(t)|^2\,dt$.
Le trinôme $\lambda^2\, I - 2\lambda\, J + K$ étant toujours positif ou nul, vérifie donc :

$$J^2 \ \leqslant\ I \cdot K$$

i.e. $(\star)$. Maintenant, si on a l'égalité dans $(\star)$, cela signifie que ce trinôme a une racine double λ_0 et que, pour ce λ_0 ,
on a :

$$\int_a^b [\lambda_0\, f - g]^2(t)\,dt \ = \ 0\,.$$

La fonction $t \longmapsto (\lambda_0\, f - g)^2(t) \cdot [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ étant continue, et positive ou nulle, on déduit de la proposition précédente que $\lambda_0\, f - g \equiv 0$ i.e. : $g \equiv \lambda_0\, f$.

□

Corollaire 4.2.3 - *Inégalité de Minkowski.*
Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a\,,\,b]$ à valeurs réelles.
Alors on a :

$$(\star\star) \qquad \left(\int_a^b |(f+g)(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \ \leqslant\ \left(\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b |g(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

De plus, si $f \not\equiv 0$, il y a égalité dans $(\star\star)$ si et seulement si il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que : $g = \lambda \cdot f$.

Preuve
En développant $(f(t) + g(t))^2$, on obtient :

$$\int_a^b |(f+g)(t)|^2\,dt \ = \ \int_a^b |f(t)|^2\,dt \ + \ 2\int_a^b f(t)\cdot g(t)\,dt \ + \ \int_a^b |g(t)|^2\,dt$$

L'inégalité $(\star\star)$ résulte alors de l'inégalité de Cauchy-Schwarz $(\star)$.
Il en résulte aussi que, si de plus $f \not\equiv 0$ et si on a égalité dans $(\star\star)$, nécessairement, on a aussi égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $g = \lambda \cdot f$. En reportant cette expression dans l'égalité $(\star\star)$, il vient : $|1 + \lambda| = 1 + |\lambda|$, ce qui implique $\lambda \geqslant 0$.

□

Exercice 3.2.13 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *et* $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. *Répondre par* vrai *ou par* faux *aux affirmations suivantes :*
1) F *est continue sur* $\mathbb{R}$.
2) F *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée* f.
3) Si f *est croissante sur* $\mathbb{R}$ *alors* F *est croissante sur* $\mathbb{R}$.
4) Si f *est positive sur* $\mathbb{R}$ *alors* F *est positive sur* $\mathbb{R}$.
5) Si f *est positive sur* $\mathbb{R}$ *alors* F *est croissante sur* $\mathbb{R}$.
6) Si f *est* T*-périodique sur* $\mathbb{R}$ *alors* F *est* T*-périodique sur* $\mathbb{R}$.
7) Si f *est paire alors* F *est impaire.*

3.3 Intégrale de fonctions à valeurs complexes.

Soit f une fonction définie sur le segment $[a\,,\,b]$ à valeurs complexes. Notons $g = Re(f)$ et $h = Im(f)$ les parties réelle et imaginaire de f. On a donc :

$$\forall t \in [a\,,\,b] \quad , \quad f(t) = g(t) + i\,h(t)\,.$$

Définition 4.3.1 - *Fonction* $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{C}$ *Riemann-intégrable.*
On dit que la fonction $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{C}$ est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$ si g et h sont Riemann-intégrables sur $[a\,,\,b]$ et on pose :

$$\int_a^b f(t)\,dt \;:=\; \int_a^b g(t)\,dt + i\int_a^b h(t)\,dt\,.$$

$\triangle$

Exemple
Soit $f(t) = e^{it}$, $t \in \left[0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Alors $g(t) = \cos t$ et $h(t) = \sin t$, et on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}\,dt \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt + i\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt \;=\; 1 + i\,.$$

L'intégrale de fonctions à valeurs complexes hérite de la plupart des propriétés de l'intégrale des fonctions à valeurs réelles, et notamment de la linéarité :

$$\int_a^b (\lambda_1\,f_1 + \lambda_2\,f_2)(t)\,dt \;=\; \lambda_1\int_a^b f_1(t)\,dt + \lambda_2\int_a^b f_2(t)\,dt \quad , \quad \lambda_1\,,\,\lambda_2 \in \mathbb{C}$$

de la relation de Chasles :

$$\int_\alpha^\gamma f(t)\,dt \;=\; \int_\alpha^\beta f(t)\,dt + \int_\beta^\gamma f(t)\,dt \quad , \quad \alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma \in [a\,,\,b]$$

et de l'inégalité :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \;\leqslant\; \int_a^b |f(t)|\,dt\,.$$

Donnons la preuve de cette dernière inégalité :
On admettra que $|f|$ est Riemann-intégrable si f est Riemann-intégrable à valeurs complexes.
Notons $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$. Si $I = 0$, cette inégalité est bien vérifiée. Sinon, si $I \neq 0$, alors $I \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et s'écrit sous forme polaire $I = |I| \cdot e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Mais alors :

$$|I| \;=\; e^{-\,i\theta} \cdot I \;=\; \int_a^b e^{-\,i\theta}\,f(t)\,dt \in \mathbb{R}$$

et donc $\displaystyle\int_a^b e^{-i\theta} f(t)\,dt = \int_a^b Re(e^{-i\theta} f(t))\,dt$.
Or :

$$Re(e^{-i\theta} f(t)) \leqslant |e^{-i\theta} f(t)| = |f(t)|$$

d'où :

$$|I| \quad \leqslant \quad \int_a^b |f(t)|\,dt\,.$$

Conséquence

Si f , $g : [a\,,\,b] \to \mathbb{C}$ sont continues, $|f|$, $|g| : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ sont continues et, puisque $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f|(t)\cdot |g|(t)\,dt$, on déduit immédiatement que les inégalités $(\star)$ et $(\star\star)$, de Cauchy-Schwarz et Minkowski, sont encore valables pour des fonctions continues à valeurs complexes.

En fait, les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski correspondent à un cas particulier des inégalités de Hölder et Minkowski.

Inégalités de Hölder et de Minkowski

Proposition 4.3.1 - *Inégalité de Hölder.*
Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a\,,\,b]$ à valeurs complexes et $p \in]1\,,\,+\infty[$. Alors, on a :

$$\left|\int_a^b f(t)\cdot g(t)\,dt\right| \quad \leqslant \quad \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \quad , \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Preuve

Il suffit de se limiter au cas de fonctions f et $g \geqslant 0$, puisque $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\cdot g(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\cdot|g(t)|\,dt$.
On peut supposer de plus f et g non identiquement nulles sur $[a\,,\,b]$ et par suite :

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \|g\|_q := \left(\int_a^b |g(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \neq 0$$

Utilisant alors l'inégalité de convexité (cf. Chapitre II) :

$$\forall a, b \in [0\,,\,+\infty[\quad , \quad a\cdot b \;\leqslant\; \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

il vient, pour tout $t \in [a\,,\,b]$:

$$\frac{f(t)}{\|f\|_p}\cdot\frac{g(t)}{\|g\|_q} \quad \leqslant \quad \frac{1}{p}\,\left(\frac{f(t)}{\|f\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\,\left(\frac{g(t)}{\|g\|_q}\right)^q$$

En intégrant sur l'intervalle $[a\,,\,b]$, on obtient l'inégalité cherchée.

□

Proposition 4.3.2 - *Inégalité de Minkowski.*
Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a\,,\,b]$ à valeurs complexes, et $p \in [1\,,\,+\infty[$. Alors on a :

$$\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad \leqslant \quad \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

Preuve
Si $p = 1$, cette inégalité est immédiate puisque pour tout $t \in [a\,,\,b]\,,\, |f(t)+g(t)| \leqslant |f(t)|+|g(t)|$.
Si $p \in\,]1\,,\,+\infty[$, on écrit, pour tout $t \in [a\,,\,b]$:

$$|f(t)+g(t)|^p \quad \leqslant \quad |f(t)+g(t)|^{p-1}\cdot|f(t)| + |f(t)+g(t)|^{p-1}\cdot|g(t)|$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à chacun des deux membres de droite, on obtient :

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt \quad \leqslant \quad \left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

d'où le résultat puisque $1 - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p}$.

□

3.4 Intégrale et primitive d'une fonction continue.

Définition 4.4.1 - *Primitive.*
Tout d'abord, on rappelle que si f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, on appelle primitive F de f sur I, une fonction $F : I \to \mathbb{K}$ dérivable telle que, pour tout $x \in I$, on a $F'(x) = f(x)$.

∘

Remarque 4.4.1.
Il résulte du théorème des accroissements finis que si $f : I \to \mathbb{K}$ admet une primitive F_1 sur I, alors toute autre primitive F de f sur I est de la forme $F = F_1 + \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{K}$, et réciproquement, toute fonction F de la forme $F = F_1 + \lambda$ est une primitive de f sur I.

Remarque 4.4.2.
Si $f : I \to \mathbb{R}$ admet une primitive sur I, alors, d'après le théorème de Darboux, f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires sur I. Autrement dit, pour $[a\,,\,b] \subset I$, f prend sur $[a\,,\,b]$ toute valeur C comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ (i.e. : il existe $c \in [a\,,\,b]$ tel que $f(c) = C$).
Ainsi la fonction $f : [0\,,\,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = 0$ si $t \in \left[0\,,\,\dfrac{1}{2}\right[$ et $f(t) = 1$ si $t \in \left[\dfrac{1}{2}\,,\,1\right]$, n'admet pas de primitive sur $[0\,,\,1]$.

Maintenant, si f est continue on a :

Théorème 4.4.1 - *Existence d'une primitive.*
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur l'intervalle I. Soit $a \in I$. Pour tout $x \in I$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.
Alors, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On a $F(a) = 0$ et, pour tout $x \in I$, on a $F'(x) = f(x)$.

△

La fonction F est la primitive de f sur I qui s'annule en $x = a$. Ainsi, toute fonction continue sur un intervalle admet au moins une primitive sur I, prendre $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. Les autres primitives se mettent sous la forme $F(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Preuve
Il suffit de montrer que F est dérivable sur I avec $F'(x) = f(x)$ pour $x \in I$.

Soient $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tels que $x+h \in I$. On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) &= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right] - f(x)\\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x)\\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} [f(t)-f(x)]\,dx\,.\end{aligned}$$

La fonction f étant continue au point x, on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\;,\;\; \exists \eta_\varepsilon > 0 \;\;\text{tel que}\;\; \forall t \in I \;\;,\;\; |t-x| \leqslant \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(t)-f(x)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Ainsi, si $0 < |h| \leqslant \eta_\varepsilon$, $x+h \in I$, on obtient :

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

□

Remarque 4.4.3.
Dans le cas où f est à valeurs réelles, la démonstration peut être conduite différemment, en s'appuyant sur la formule de la moyenne :

$$F(x+h)-F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt = h\cdot f(\xi_h)$$

où ξ_h est compris entre x et $x+h$. Et, si h tend vers 0, la continuité de f implique que $f(\xi_h)$ tend vers $f(x)$.

Exercice 3.4.1 *Identifier toutes les primitives des fonctions f sélectionnées ci-dessous.*

i) $f(x) = (tg\,x)^2$; *ii)* $f(x) = 1/(x\,\ell n x)$; *iii)* $f(x) = x/\sqrt{x+1}$;
iv) $f(x) = 1/(3+e^{-x})$; *v)* $f(x) = (x-1)/(x^2+x+1)$; *vi)* $f(x) = (x+2)/(x^2-3\,x-4)$.

Lorsque la fonction f n'est pas continue mais seulement monotone, on peut encore considérer $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.
On peut alors se demander si la fonction F ainsi obtenue est dérivable. La réponse (en général) est NON. Par contre, on conserve certaines informations comme l'indique l'exercice ci-dessous.

Exercice 3.4.2 *Soit $\Phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone croissante. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $x \in [a,b]$, on pose $f(x) := \lambda + \int_a^x \Phi(t)\,dt$. Soient y, y_1 et y_2 trois points de $[a,b]$.*

1) Montrer que pour $y < y_1 < y_2 \leq b$, on a :

$$(y_2-y_1)\int_y^{y_1}\Phi(t)\,dt \leq (y_2-y_1)\;\Phi(y_1)\;(y_1-y) \leq (y_1-y)\int_{y_1}^{y_2}\Phi(t)\,dt\,.$$

2) Montrer que pour $a \leq y_1 < y_2 < y$, on a :

$$(y-y_2)\int_{y_1}^{y_2}\Phi(t)\,dt \leq (y-y_2)\;\Phi(y_2)\;(y_2-y_1) \leq (y_2-y_1)\int_{y_2}^{y}\Phi(t)\,dt\,.$$

3) Montrer que pour $a \leq y_1 < y < y_2 \leq b$, on a :

$$(y_2-y)\int_{y_1}^{y}\Phi(t)\,dt \leq (y_2-y)\;\Phi(y)\;(y-y_1) \leq (y-y_1)\int_{y}^{y_2}\Phi(t)\,dt\,.$$

4) On fixe $y \in]a,b[$. Déduire de ce qui précède que l'application $G : [a,b]\setminus\{y\} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe le quotient $\big(f(x)-f(y)\big)/(x-y)$ est croissante sur $[a,b]$.

5) Montrer que f est convexe sur $[a,b]$.

6) On fixe $y \in]a,b[$. Que vaut $f'_g(y)$? Et $f'_d(y)$?

On déduit du théorème précédant la propriété fondamentale du calcul intégral :

Corollaire 4.4.1.
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Soit F une primitive de f sur I. Alors, pour tous $a\,,\,b \in I$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; F(b) - F(a)\,.$$

$\triangle$

Preuve
Notons F_1 la fonction $x \longmapsto F_1(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt : I \to \mathbb{K}$. Alors, la fonction $F_2 = F - F_1$ est dérivable sur I avec $F_2' = 0$ sur I ; F_2 est donc constante sur I et, pour $x = a$, on obtient : $F_2 = F(a)$. D'où :

$$F(x) - F(a) \;=\; F_1(x) \;=\; \int_a^x f(t)\,dt \quad , \quad x \in I\,.$$

$\square$

<u>Notation</u> : généralement, on utilise la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F\,|_a^b$.

Remarque 4.4.4.
Il résulte du corollaire 1 que si f est de classe C^1 sur $[a\,,\,b]$, alors on a :

$$f(b) - f(a) \;=\; \int_a^b f'(t)\,dt\,.$$

Cependant, cette formule est encore vraie si f est continue dérivable sur $[a\,,\,b]$ avec f' Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$. En effet, si $\sigma = \{a_0 = a\,,\,a_1\,,\,\ldots\,,\,a_n = b\}$ est une subdivision de $[a\,,\,b]$, en appliquant la formule des accroissements finis, on obtient :

$$f(b) - f(a) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} (f(a_{k+1}) - f(a_k)) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\,f'(\xi_k) \quad , \quad \xi_k \in]a_k\,,\,a_{k+1}[\,.$$

Et comme f' est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$, on a :

$$''\lim'' \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\,f'(\xi_k) \;=\; \int_a^b f'(t)\,dt$$

où la notion $''\lim''$ signifie limite selon que $|\sigma| := \max\limits_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$ tend vers 0.

Exercice 3.4.3 *Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes dont les équations sont $y = x^2/2$ d'une part et $y = 1/(1+x^2)$ d'autre part.*

Exercice 3.4.4 *Soit f une fonction dérivable sur $[0\,,\,1]$ vérifiant les trois conditions suivantes :*

i) $0 \le f' \le 2$; *ii)* f' *est décroissante ;* *iii)* $f(0) = 0$ *et* $f(1) = 1$.

Identifier le plus grand nombre m et le plus petit nombre M donnant lieu à l'encadrement $m \le \int_0^1 f(t)\,dt \le M$. Peut-il y avoir égalité.

Applications

Lemme (Lemme de Gronwall)
Soient $\varphi : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et $c \in [a\,,\,b]$.
On suppose qu'il existe des constantes positives A et B telles que :

$$\forall t \in [a\,,\,b] \quad , \quad \varphi(t) \leqslant A + B\left|\int_c^t \varphi(s)\,ds\right|.$$

Alors :

$$\forall t \in [a\,,\,b] \quad , \quad \varphi(t) \leqslant A \cdot e^{B|t-c|}.$$

Preuve
Considérons la fonction $F : [c\,,\,d] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(t) := A + B\int_c^t \varphi(s)\,ds.$$

D'après le théorème précédent , F est de classe C^1 sur $[c\,,\,b]$ et vérifie $\forall t \in [c\,,\,b]\,,\, \varphi(t) \leqslant F(t)$.
Comme $F'(t) = B\,\varphi(t) \leqslant B\,F(t)$, on en déduit que $\dfrac{d}{dt}\,[e^{-Bt}\,F(t)] = e^{-\,Bt}\,[F'(t) - B\,F(t)] \leqslant 0$ sur $[c\,,\,b]$.
Par suite,

$$\forall t \in [c\,,\,b] \quad , \quad e^{-\,Bt}\,F(t) \leqslant e^{-\,Bc}\,F(c) = A\,e^{-\,Bc}$$

d'où : $\forall t \in [c\,,\,b]\,,\; \varphi(t) \leqslant F(t) \leqslant A\,e^{B\,(t-c)}$.
Pour $t \in [a\,,\,c]$, on considère la fonction $G(t) := A + B\displaystyle\int_t^c \varphi(s)\,ds$.
G est de classe C^1 sur $[a\,,\,c]$, vérifie : $\varphi(t) \leqslant G(t)$ et $G'(t) = -\,B\,\varphi(t) \geqslant -\,B\,G(t)$, i.e. : $\dfrac{d}{dt}\,[e^{Bt}G] \geqslant 0$, ce qui implique $e^{Bt}\,G(t) \leqslant e^{Bc}\,G(c)$, d'où $\varphi(t) \leqslant G(t) \leqslant A\,e^{B\,(c-t)}$.

Théorème du relèvement
Soit $f : I \to U$ une application de classe C^1 d'un intervalle I, non vide, de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble U des nombres complexes de module 1. Alors :

(i) Il existe une application $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$, de classe C^1 telle que :

$$\forall t \in I \quad , \quad f(t) = e^{i\,\varphi_0(t)}\,.$$

(ii) Les applications $\varphi : I \to \mathbb{R}$, de classe C^1, vérifiant :

$$(\star) \qquad \forall t \in I \quad , \quad f(t) = e^{i\,\varphi(t)}$$

sont exactement les fonctions φ de la forme $\varphi = \varphi_0 + 2k\cdot\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.
(Il y a donc unicité des applications φ de classe C^1 sur I vérifiant $(\star)$ à un multiple entier de 2π près.)

Preuve
Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et vérifie $(\star)$, φ vérifie :

$$\forall t \in I \quad , \quad i\,\varphi'(t)\,f(t) = f'(t)\,.$$

La fonction $h : t \longmapsto \dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{f'(t)}{f(t)}$ est continue sur I et à valeurs réelles puisque, pour tout $t \in I$, $f(t) \in U$ et donc :

$$\forall t \in I \quad , \quad |f(t)|^2 = f(t)\cdot\overline{f}(t) = 1$$

ce qui, par dérivation, donne :

$$\forall t \in I \quad , \quad f'(t)\cdot\overline{f}(t) + f(t)\cdot\overline{f'(t)} = 0\,.$$

Ainsi, $h(t) \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
On a donc nécessairement, pour $t_0 \in I$:

$$\forall t \in I \quad , \quad \varphi(t) - \varphi(t_0) = \frac{1}{i} \int_{t_0}^{t} \frac{f'(s)}{f(s)}\, ds = \phi(t)\,.$$

Par ailleurs, $f(t_0) \in U$: il existe donc $\theta_0 \in \mathbb{R}$ telle que $f(t_0) = e^{i\,\theta_0}$.
Et, comme $e^{i\,\varphi(t_0)} = f(t_0)$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi(t_0) = \theta_0 + 2k \cdot \pi$. Ainsi, pour tout $t \in I$, on a :

$$\varphi(t) \;=\; \theta_0 + \phi(t) + 2k \cdot \pi\,.$$

Considérons alors la fonction $\varphi_0 : t \longmapsto \theta_0 + \phi(t) : I \to \mathbb{R}$. Cette fonction est de classe C^1 sur I, et si on pose $F(t) = e^{i\,\varphi_0(t)}$, on a :

$$\forall t \in I \quad , \quad \left(\frac{F}{f}\right)'(t) \;=\; \left(i\,\frac{\varphi_0'(t)}{f(t)} - \frac{f'(t)}{(f(t))^2}\right) F(t) \;=\; 0\,.$$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que : $\forall t \in I$, $F(t) = \lambda \cdot f(t)$.
En particulier, pour $t = t_0$, $F(t_0) = e^{i\,\varphi_0(t_0)} = e^{i\,\theta_0} = \lambda\, f(t_0) = \lambda\, e^{i\,\theta_0}$, ce qui implique $\lambda = 1$: φ_0 est donc une solution de classe C^1 sur I à $(\star)$. Compte-tenu de ce qui précède, les autres solutions sont exactement de la forme : $\varphi_0 + 2k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\square$

Corollaire
Soit $\phi : I \to \mathbb{C}^*$ une fonction de classe C^1.
Alors, il existe deux fonctions $\rho : I \to \mathbb{R}_+^* =]0\,,+\infty[$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in I \quad , \quad \phi(t) = \rho(t)\, e^{i\,\varphi(t)}\,.$$

Preuve
Posons $\rho(t) = |\phi(t)|$, $t \in I$. Puisque $\phi(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$, ρ est de classe C^1 sur I, ainsi que la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\phi(t)}{|\phi(t)|} : I \to U$. Il suffit ensuite d'appliquer le théorème de relèvement à cette fonction f.

$\square$

Proposition (Inégalité de Poincaré)
Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{K}\,(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose $f(a) = 0$.
Alors :

$$\int_a^b |f(t)|^2\, dt \quad \leqslant \quad \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(t)|^2\, dt$$

Preuve
La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,,b]$ et $f(a) = 0$, on a donc, pour tout $t \in [a\,,b]$: $f(t) = \displaystyle\int_a^t f'(s)ds$.

Par suite, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|f(t)|^2 \quad \leqslant \quad \left(\int_a^t |f'(s)|\, ds\right)^2 \quad \leqslant \quad \int_a^t |f'(s)|^2\, ds \cdot \int_a^t 1^2\, ds$$

i.e. $|f(t)|^2 \;\leqslant\; (t-a) \displaystyle\int_a^b |f'(s)|^2\, ds$.
En intégrant sur $[a\,,b]$, on obtient l'inégalité annoncée.

$\square$

Remarque
Si on suppose de plus que $f(b)=0$, on a :

$$(\star) \qquad \int_a^b |f(t)|^2\,dt \;\leqslant\; \frac{(b-a)^2}{8}\int_a^b |f'(t)|^2\,dt$$

En effet, puisque $f(a)=0$, en utilisant l'inégalité de Poincaré sur le segment $\left[a\,,\,\dfrac{a+b}{2}\right]$, on a :

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(t)|^2\,dt \;\leqslant\; \frac{(b-a)^2}{8}\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|^2\,dt$$

De même, puisque $f(b)=0$, en utilisant à nouveau l'inégalité de Poincaré sur le segment $\left[\dfrac{a+b}{2}\,,\,b\right]$, on a aussi :

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(t)|^2\,dt \;\leqslant\; \frac{(b-a)^2}{8}\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(t)|^2\,dt$$

On en déduit l'inégalité $(\star)$.
Cependant, la constante $\dfrac{(b-a)^2}{8}$ dans l'inégalité $(\star)$ n'est pas la meilleure.

Proposition (Inégalité de Wirtinger)
Soit $f:[a\,,\,b]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
Alors, si $f(a)=f(b)=0$, on a :

$$\int_a^b |f(t)|^2\,dt \;\leqslant\; \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(t)|^2\,dt$$

avec égalité si et seulement si $f(t):=\lambda\sin\left(\pi\,\dfrac{t-a}{b-a}\right)$ où λ est une constante réelle.

Preuve
En posant $g(s):=f\left(a+s\cdot\dfrac{b-a}{\pi}\right)$, $s\in[0\,,\,\pi]$, on se ramène au cas $[a\,,\,b]=[0\,,\,\pi]$ et à l'inégalité :

$$(\star) \qquad \int_0^\pi |g(s)|^2\,ds \;\leqslant\; \int_0^\pi |g'(s)|^2\,ds$$

avec égalité si et seulement si $g(s)=\lambda\cdot\sin s$, $s\in[0\,,\,\pi]$.

Soit $h(s):=g(s)\,\mathrm{cotg}(s)=\dfrac{g(s)}{\mathrm{tg}s}$.

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,,\,\pi[$ et se prolonge par continuité en $s=0$ par $h(0)=g'(0)$ et en $s=\pi$ par $h(\pi)=g'(\pi)$.
On va montrer que :

$$\int_0^\pi [g'(s)-h(s)]^2\,ds \;=\; \int_0^\pi |g'(s)|^2\,ds-\int_0^\pi |g(s)|^2\,ds$$

ce qui démontrera l'inégalité $(\star)$ recherchée.
Comme $[g'(s)-h(s)]^2=|g'(s)|^2+|g(s)|^2\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2\,s}-2g(s)\,g'(s)\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,s}$ et que : $\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2\,(s)}=-1-\left(\dfrac{1}{\mathrm{tg}}\right)'(s)$, on peut écrire :

$$\int_0^\pi [g'(s)-h(s)]^2\,ds \;=\; \int_0^\pi |g'(s)|^2\,ds-\int_0^\pi |g(s)|^2\,ds-\int_0^\pi \left[g(s)^2\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}\,s}\right]'ds$$

et comme $g(s)^2\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tg}(s)}=g(s)\,h(s)$, et que $\lim\limits_{s\to 0} g(s)\,h(s)=0=\lim\limits_{s\to\pi} g(s)\,h(s)$, on en déduit $(\star)$.
Enfin, on a égalité dans $(\star)$ si et seulement si $\displaystyle\int_0^\pi |g'(s)-h(s)|^2\,ds=0$, c'est-à-dire, puisque la fonction

$s \longmapsto g'(s) - h(s)$ est continue sur $[0\,,\,\pi]$, si et seulement si $g'(s) = h(s)$, i.e. puisque $g(0) = g(\pi) = 0$, $g(s) = \lambda \cdot \sin s$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\square$

Exercice 3.4.5 *Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a\,,\,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$.*

1) On pose $M := \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$. Etablir l'inégalité : $|\int_a^b f(t)\ dt| \leq \frac{(b-a)^2}{4}\ M$.

2) Dans quels cas a-t'on égalité ?

Exercice 3.4.6 *Soit $f : [0,1] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $0 \leq f'(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0,1]$. Etablir l'inégalité :*

$$\int_0^1 f(t)^3\ dt \leq \Big(\int_0^1 f(t)\ dt\Big)^2 .$$

Corollaire 4.4.2.
Soient $I = (a\,,\,b)$, $J = (\alpha\,,\,\beta)$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue, et $u\,,\,v : J \to I$ deux fonctions dérivables.
On pose :

$$\forall x \in J \quad , \quad \phi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt\,.$$

Alors $\phi : J \to \mathbb{K}$ est dérivable et,

$$\forall x \in J \quad , \quad \phi'(x) = v'(x) \cdot f(v(x)) - u'(x) \cdot f(u(x))\,.$$

$\triangle$

Preuve
Soit F une primitive de f sur I. On a donc : $\phi(x) = F(v(x)) - F(u(x))$.
Ainsi, ϕ , composée de fonctions dérivables, est dérivable sur J et :

$$\forall x \in J \quad , \quad \phi'(x) = F'(v(x))\,v'(x) - F'(u(x))\,u'(x)$$

c'est-à-dire, puisque $F' = f$, $\phi'(x) = v'(x) \cdot f(v(x)) - u'(x) \cdot f(u(x))$.

$\square$

Exemple
Soit $\phi(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \ell n\, t\, dt$, $x \in]0\,,+\infty[$; ϕ est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et on a :
$\phi'(x) = 2x\,\ell n(x^2) - \ell n\, x = (4x-1)\,\ell n\, x$.

Exercice 3.4.7 *Calculer la dérivée de l'application $x \longmapsto G(x) = \int_x^{2\,x} 1/(1+t^2+t^4)\,dt$.*

Exercice 3.4.8 *On pose $F(x) = \int_x^{x^2} 1/\ell n\, t\, dt$.*
1) Quel est l'ensemble de définition de F ? La fonction F est-elle continue ? La fonction F est-elle dérivable sur son ensemble de définition ?

2) Déterminer $\lim_{x\to 1+} F(x)$ en comparant la fonction F à $H(x) = \int_x^{x^2} 1/(t\,\ell n\, t)\,dt$.

Corollaire 4.4.3 - *Intégration par parties.*
Soient f , $g : [a\,,\,b] \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\cdot g'(t)\,dt \;&= fg\,|_a^b - \int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt \\ &= [f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a)] - \int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

△

Preuve
Si $h = fg$, h est une primitive de h' sur $I = [a\,,\,b]$ et il résulte du corollaire 1 que :

$$\int_a^b h'(t)\,dt \quad = \quad h(b) - h(a)\,.$$

□

Exemple : Intégrales de Wallis
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $I_n := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\,t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\,t\,dt$ (effectuer le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - s$).
En intégrant par parties, on obtient immédiatement que, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}\,t\,dt = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\,t\cdot\cos^2\,t\,dt$$

i.e. $(n+2)\,I_{n+2} = (n+1)\,I_n$.

On déduit de cette relation de récurrence que :

$(n+2)\,I_{n+2}\cdot I_{n+1} = (n+1)\,I_{n+1}\cdot I_n = \cdots = I_1\cdot I_0 = \dfrac{\pi}{2}$,

$I_{2p} = \dfrac{1\cdot 3\cdots(2p-1)}{2\cdot 4\cdots(2p)}\cdot\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2p)!}{(p!)^2}\cdot\dfrac{\pi}{2^{2p+1}}$

et $I_{2p+1} = \dfrac{2\cdot 4\cdots(2p)}{1\cdot 3\cdots(2p+1)} = \dfrac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}$.

Par ailleurs, on a $I_{n+2} \leqslant I_{n+1}$ pour tout entier $n \geqslant 0$, par suite :

$$\frac{n+1}{n+2} \quad = \quad \frac{I_{n+2}}{I_n} \;\leqslant\; \frac{I_{n+1}}{I_n} \;\leqslant\; 1$$

ce qui prouve que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$ existe et vaut 1, et donc que $(n+1)\,I_{n+1}\cdot I_n \sim n\,I_n^2$ quand n tend vers $+\infty$.
Avec l'égalité $(n+1)\,I_{n+1}\cdot I_n = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Une application importante de ce corollaire 3 est la formule de Taylor avec reste intégral :

Corollaire 4.4.4 - *Formule de Taylor avec reste intégral.*
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I. Alors, pour tous $a\,,\,b \in I$, on a :

$$f(b) \quad = \quad f(a) + \frac{b-a}{1!}\,f'(a) \,+\, \ldots \,+\, \frac{(b-a)^n}{n!}\,f^{(n)}(a) + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n\,f^{(n+1)}(t)\,dt\,.$$

△

Preuve
On raisonne par récurrence sur l'entier n.

Pour $n = 0$, c'est la formule (corollaire 1) : $f(b) = f(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)\,dt$.
Supposons la formule établie à l'ordre $n-1$, $n \geqslant 1$. Le reste à l'ordre $n-1$ est :

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-t)^{n-1}\, f^{(n)}(t)\,dt\,.$$

$f^{(n)}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, on obtient donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-t)^{n-1}\, f^{(n)}(t)\,dt &= \frac{1}{(n-1)!}\left[-\frac{(b-t)^n}{n}\, f^{(n)}(t)\right]\Big|_a^b + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{(b-a)^n}{n!}\, f^{(n)}(a) + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

□

Remarque
Lorsque f est à valeurs réelles, on peut déduire de cette formule de Taylor avec reste intégral, avec f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, la formule de Taylor-Lagrange classique :

$$f(b) \;=\; f(a) + \frac{b-a}{1!}\, f'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}\, f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi) \quad , \quad \xi \in [a\,,\, b]\,.$$

En effet, désignons par m et M les bornes inférieure et supérieure de $f^{(n+1)}$ sur le segment $[a\,,\,b]$. On a :

$$m\cdot\int_a^b (b-t)^n\,dt \;\leqslant\; \int_a^b (b-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\,dt \;\leqslant\; M\cdot\int_a^b (b-t)^n\,dt$$

et comme $\displaystyle\int_a^b (b-t)^n\,dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1}$, et $f^{(n+1)}$ continue sur $[a\,,\,b]$, $f^{(n+1)}$ prend toute valeur comprise entre m et M, i.e. : $\exists \xi \in [a\,,\,b]$ tel que :

$$\frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\,dt \;=\; \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi)\,.$$

Application
Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit $a \in I$.
Alors <u>la</u> primitive F d'ordre $n \geqslant 1$ de f sur I qui s'annule, ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ en a, est la fonction :

$$F(t) \;=\; \int_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\, f(s)\,ds$$

Ceci résulte immédiatement de la formule de Taylor avec reste intégral.
Ceci résulte aussi de la formule de dérivation du corollaire 2.

Exercice 3.4.9 *(Intégrales de Wallis)*
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\, t)^n\; dt$.

1) Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} .

2) En déduire $I_{2\,p}$ et $I_{2\,p+1}$.

3) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.

4) En déduire que les suites $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes.

5) Calculer $n\, I_n\, I_{n+1}$ et montrer que les suites $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2\,n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes.

Exercice 3.4.10 *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n := \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$.*

1) Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .

2) Calculer I_n.

3) En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \, C_n^k$.

Un autre outil pour le calcul d'intégrales est celui du changement de variable.

Corollaire 4.4.5.
Soient $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue et $\varphi : J \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de l'intervalle J à valeurs dans l'intervalle I. Alors, pour tout $\alpha\,,\,\beta \in J$, on a :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt \;=\; \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(s))\,\varphi'(s)\,ds\,.$$

$\triangle$

Preuve
Soit F une primitive de f sur I. On a :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt \;=\; F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

et, d'après le corollaire 1 :

$$\begin{aligned} F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) &= \int_{\alpha}^{\beta} (F\circ\varphi)'(s)\,ds \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} F'(\varphi(s)\;\varphi'(s)\,ds \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(s))\;\varphi'(s)\,ds\,. \end{aligned}$$

$\square$

Exemple

$$\int_1^e \ell n\, t\, dt = 1$$

En effet, soient $t = \varphi(s) = e^s : \mathbb{R} \to]0\,,+\infty[$, et $\alpha = 0\,,\,\beta = 1$.
On a donc : $\varphi'(s) = e^s$:

$$\int_1^e \ell n\, t\, dt \;=\; \int_0^1 \ell n(e^s)\cdot e^s\, ds \;=\; \int_0^1 s\, e^s\, ds\,.$$

Et, en intégrant par parties : $f(s) = s\,,\, g(s) = e^s$:

$$\int_0^1 s\cdot e^s\, ds \;=\; [s\cdot e^s]_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^s\, ds \;=\; e - e + 1 \;=\; 1\,.$$

Exercice 3.4.11
1) Montrer que l'application $\psi : [\ell n2, \ell n5] \longrightarrow [1,2]$ qui à x associe $\sqrt{e^x - 1}$ est de classe C^1 et qu'elle admet une application réciproque (notée φ) qui elle aussi est de classe C^1.

2) A l'aide du changement de variable (défini par φ), calculer la valeur de l'intégrale $I = \int_{\ell n2}^{\ell n5} \sqrt{e^x - 1}\, dx$.

Exercice 3.4.12 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une foncion strictement croissante et de classe C^1. On considère les deux intégrales $I_1 = \int_a^b f(t)\,dt$ et $I_2 = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt$.*

1) Rappeler pourquoi f admet une fonction réciproque f^{-1}. Quelle est la régularité de f^{-1} ?

2) Effectuer le changement de variable $t = f(u)$ dans l'intégrales I_2.

3) Calculer I_2 en fonction de I_1.

4) Faire un dessin figurant f et f^{-1} puis interpréter ce résultat géométriquement.

Exercice 3.4.13

1) A l'aide du changement de variables $\theta = \arcsin \frac{x}{R}$, trouver une primitive de $f : x \longmapsto (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ et en déduire l'aire dun disque de rayon R.

2) A l'aide du changement de variables $t = (2+x)^{\frac{1}{6}}$, trouver une primitive de $f : x \longmapsto \left(\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}\right)^{-1}$.

3) A l'aide du changement de variables $x = 1 + 2\,\mathrm{th}\,u$, trouver une primitive de $f : x \longmapsto \left((x-1)^2 - 4\right)^{-2}$.

3.5 Calcul approché d'une intégrale.

La connaissance d'une formule explicite pour la primitive F de f permet de calculer la valeur **exacte** de l'intégrale de f sur $[a,b]$ suivant la formule :

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; F(b) - F(a)\,.$$

Exercice 3.5.1 *Calculer les intégrales suivantes.*

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}\,dx$; *ii)* $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{arctg}\,x\,dx$; *iii)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\sin x\,dx$;

iv) $\displaystyle\int_{-1}^1 (\arccos x)^2\,dx$; *v)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$; *vi)* $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$;

vii) $\displaystyle\int_1^2 x^2\,\ell n\,x\,dx$; *viii)* $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+7}\,dx$; *ix)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,dx$.

Toutefois, la primitive F de f est presque toujours une fonction pour laquelle on ne connait pas de formule explicite. Par exemple, il n'existe pas de fonction usuelle qui soit une primitive de la fonction $f : t \longmapsto \sqrt{t^3+t}$ sur $(0\,,+\infty)$. Ni changement de variables, ni calcul par intégration par parties, ni d'autres techniques ne permettent, comme dans l'exercice ci-dessus, de calculer l'intégrale $\int_1^2 \sqrt{t^3+t}\,dt$. Il faut alors avoir recours à un calcul **approché** de la valeur de l'intégrale $\int_1^2 \sqrt{t^3+t}\,dt$.

L'objectif de ce paragraphe est de décrire différentes méthodes qui permettent d'effectuer un tel calcul. D'une manière générale, on procède de la façon suivante :

a) On découpe l'intervalle $[a\,,\,b]$ en n sous-intervalles $[a_k\,,\,a_{k+1}]$ de même longueur, soit $a_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$ avec $k \in \{0\,,1\,,\ldots\,,n-1\}$.

b) Sur chaque "petit" segment $[a_k\,,\,a_{k+1}]$, on compare f à une fonction φ_k plus simple et dont l'intégrale se calcule facilement. Puis, on compare les intégrales $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} \varphi_k(t)\,dt$.

c) On estime l'erreur globale $e_n := \left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \varphi_k(t)\,dt\right|$.

Le choix de la fonction φ_k dépend de la méthode utilisée, et la performance de la méthode se mesure selon les critères suivants :

- le peu de régularité (nombre de dérivées) consommé sur f,
- la petitesse de l'erreur e_n et, en particulier, la vitesse avec laquelle e_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

On va se limiter à trois méthodes d'approximation de l'intégrale $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt$ par une intégrale $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} \varphi_k(t)\,dt$.
Par commodité, on notera $a_k = a$, $a_{k+1} = b$ et $\varphi_k = \varphi$.

1. **Méthode des points médians**
Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On approche f sur $[a\,,\,b]$ par la fonction constante $\varphi : [a\,,\,b] \to \mathbb{R} : t \longmapsto f(m)$, où $m = \dfrac{1}{2}(a+b)$ (point médian).
On doit évaluer l'erreur $e = \left|\displaystyle\int_a^b f(s)\,ds - \int_a^b \varphi(s)\,ds\right| = \left|\displaystyle\int_a^b f(s)\,ds - (b-a)\,f(m)\right|$.
$(b-a)\,f(m)$ correspond à l'aire du rectangle de base le segment $[a\,,\,b]$ et de hauteur $f(m)$.
Considérons la fonction auxiliaire $\phi : \left[0\,,\,\dfrac{b-a}{2}\right] \to \mathbb{R} : t \longmapsto \phi(t) = \displaystyle\int_{m-t}^{m+t} f(s)\,ds - 2t\,f(m)$.
Ainsi, $e = \left|\phi\left(\dfrac{b-a}{2}\right)\right|$.
On a : $\phi(0) = 0$, $\phi'(t) = f(m+t) + f(m-t) - 2f(m)$, $\phi'(0) = 0$ et $\phi''(t) = f'(m+t) - f'(m-t)$.
Et, si on pose $M_2 := \underset{s\in[a\,,\,b]}{Max}|f''(s)|$, d'après la formule des accroissements finis, il vient : $|\phi''(t)| \leqslant 2t\,M_2$.
Par suite, ϕ'' étant continue on a : $\phi'(t) = \displaystyle\int_0^t \phi''(s)\,ds$ et donc : $|\phi'(t)| \leqslant 2M_2 \displaystyle\int_0^t s\,ds = M_2\,t^2$.
De même, $\phi(t) = \displaystyle\int_0^t \phi'(s)\,ds$ et donc : $|\phi(t)| \leqslant M_2 \displaystyle\int_0^t s^2\,ds = M_2\,\frac{t^3}{3}$.
D'où : $e = \left|\phi\left(\dfrac{b-a}{2}\right)\right| \leqslant M_2\,\dfrac{(b-a)^3}{24}$.
Par suite, l'erreur
$$\begin{aligned} e_n &= \left|\int_a^b f(s)\,ds - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \varphi_k(s)\,ds\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(s)\,ds - \int_{a_k}^{a_{k+1}} \varphi_k(s)\,ds\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(a_{k+1}-a_k)^3}{24}\,M_k \quad , \quad M_k = \underset{s\in[a_k\,,\,a_{k+1}]}{Max}|f''(s)|\ . \end{aligned}$$
Finalement, en prenant pour valeur approchée de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(s)\,ds$ l'expression
$$I_n = \frac{b-a}{n}\,[f(m_0)\ +\ \ldots\ +\ f(m_{n-1})] \text{ où } m_k = a + \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\,,$$
l'erreur $e_n = \left|\displaystyle\int_a^b f(s)\,ds - I_n\right|$ vérifie : $e_n \leqslant \dfrac{(b-a)^3}{24n^2}\,\underset{s\in[a\,,\,b]}{Max}|f''(s)|$.

2. **Méthode du trapèze**
Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On approche f sur $[a\,,\,b]$ par la fonction affine $\varphi : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ qui vérifie $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(b) = f(b)$, i.e. : $\varphi(s) = f(a) + (s-a)\,\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Alors $\displaystyle\int_a^b \varphi(s)\,ds = \frac{b-a}{2}\,[f(a)+f(b)]$.

Considérons, comme précédemment, la fonction auxiliaire :

$$\phi : \left[0\ ,\ \frac{b-a}{2}\right] \to \mathbb{R} : t \longmapsto \phi(t) = \int_{m-t}^{m+t} f(s)\,ds - t[f(m+t)+f(m-t)] \ \text{ où } m = \frac{1}{2}\,(a+b)\,.$$

On a : $\phi(0) = 0\,,\ \phi'(t) = f(m+t) + f(m-t) - [f(m+t)+f(m-t)] - t[f'(m+t) - f'(m-t)]$
i.e. : $\phi'(t) = -\,t[f'(m+t) - f'(m-t)]$.
De nouveau, en utilisant la formule des accroissements finis et en posant $M_2 = \underset{s\in[a\,,\,b]}{Max}|f''(s)|$, on obtient : $|\phi'(t)| \leqslant 2t^2\,M_2$.
Ecrivant $\phi(t) = \displaystyle\int_0^t \phi'(s)\,ds$ (puisque $\phi(0) = 0$), on obtient :

$$|\phi(t)| \ \leqslant\ \int_0^t 2s^2\,M_2\,ds \ =\ 2M_2\,\frac{t^3}{3}$$

et $e = \left|\phi\left(\dfrac{b-a}{2}\right)\right| \ \leqslant\ M_2\,\dfrac{(b-a)^3}{12}\,.$

Et finalement, en prenant pour valeur approchée de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(s)\,ds$ l'expression

$$I_n \ =\ \frac{b-a}{2n}\ [f(a_0) + 2f(a_1)\ +\ \ldots\ +\ 2f(a_{n-1}) + f(a_n)]$$

où $a_k = a + k\ \dfrac{b-a}{n}$, l'erreur $e_n = \left|\displaystyle\int_a^b f(s)\,ds - I_n\right|$ vérifie :

$$e_n \ \leqslant\ \frac{(b-a)^3}{12n^2}\ \cdot\ \underset{s\in[a\,,\,b]}{Max}|f''(s)|\ .$$

Remarque : cette méthode n'est pas meilleure que la méthode des points médians.

3. **Méthode de Simpson**
Soit $f\ :\ [a\,,\,b]\ \to\ \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^4$. On approche f sur $[a\,,\,b]$ par la fonction polynomiale de degré 2 $\varphi : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ qui vérifie $\varphi(a) = f(a)\,,\ \varphi\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\,,\ \varphi(b) = f(b)$.
Alors $\displaystyle\int_a^b \varphi(s)\,ds = \frac{b-a}{6}\ \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$.
Considérons la fonction auxiliaire :

$$\phi : \left[0\ ,\ \frac{b-a}{2}\right] \to \mathbb{R} : t \longmapsto \phi(t) = \int_{m-t}^{m+t} f(s)\,ds - \frac{2t}{6}\,[f(m-t) + 4f(m) + f(m+t)]$$

où $m = \dfrac{1}{2}\,(a+b)$.
On a : $\phi(0) = 0\,,\ \phi'(t) = f(m+t)+f(m-t) - \dfrac{1}{3}\,[f(m-t)+4f(m)+f(m+t)] - \dfrac{t}{3}\,[-\,f'(m-t)+f'(m+t)]$.
Alors $\phi'(0) = 0$ et

$$\begin{aligned}
\phi''(t) \ &=\ f'(m+t) - f'(m-t) - \frac{1}{3}\,[f'(m+t) - f'(m-t)] - \frac{1}{3}\,[f'(m+t) - f'(m-t)] \\
&\quad -\ \frac{t}{3}\,[f''(m+t) + f''(m-t)] \\
\phi''(t) \ &=\ \frac{1}{3}\,[f'(m+t) - f'(m-t)] - \frac{t}{3}\,[f''(m+t) + f''(m-t)]\,.
\end{aligned}$$

De nouveau, $\phi''(0) = 0$ et

$$\begin{aligned}
\phi'''(t) &= \frac{1}{3}\left[f''(m+t) + f''(m-t)\right] - \frac{1}{3}\left[f''(m+t) + f''(m-t)\right] \\
&\quad - \frac{t}{3}\left[f'''(m+t) - f'''(m-t)\right] \\
\phi'''(t) &= -\frac{t}{3}\left[f'''(m+t) - f'''(m-t)\right].
\end{aligned}$$

Utilisant à nouveau la formule des accroissements finis, il vient :

$$|\phi'''(t)| \leqslant \frac{2}{3}\, t^2\, M_4 \qquad \text{avec } M_4 = \underset{s\in[a\,,\,b]}{Max}|f^{(4)}(s)|\,.$$

D'où $|\phi''(t)| \leqslant \displaystyle\int_0^t \frac{2}{3}\, M_4\, s^2\, ds = \frac{2}{9}\, M_4\, t^3$ et, puisque $\phi'(0) = 0$, on obtient de même :
$|\phi'(t)| \leqslant \displaystyle\int_0^t \frac{2}{9}\, M_4\, s^3\, ds = \frac{1}{18}\, M_4\, t^4$.
A nouveau, puisque $\phi(0) = 0$, il vient :

$$|\phi(t)| \leqslant \int_0^t \frac{1}{18}\, M_4\, s^4\, ds = \frac{M_4}{90}\, t^5 \quad \text{et} \quad e = \left|\phi\left(\frac{b-a}{2}\right)\right| \leqslant \frac{M_4}{2880}\,(b-a)^5\,.$$

Et finalement, en prenant pour valeur approchée de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(s)\, ds$, l'expression

$$I_n = \frac{b-a}{6n}\left[f(a_0) + 4f(m_0) + 2f(a_1) + 4f(m_2) + \ldots + 2f(a_{n-1}) + 4f(m_{n-1}) + f(a_n)\right]$$

où $a_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$, $m_k = a + \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{(b-a)}{n}$, l'erreur $e_n = \left|\displaystyle\int_a^b f(s)\, ds - I_n\right|$ vérifie :

$$e_n \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880\cdot n^4}\ \underset{s\in[a\,,\,b]}{Max}|f^{(4)}(s)|\,.$$

Remarque
Si f est une fonction polynomiale de degré 2 sur $[a\,,\,b]$, l'approximation $\dfrac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$ est en fait la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(s)\, ds$.

QCM. *Dire (on demande de justifier la réponse) si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.*

1) Toute fonction intégrable sur $[a, b]$ est continue.

2) Si f est intégrable sur $[a, b]$, on a $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

3) Soit f une fonction sur $[a, b]$ vérifiant la propriété : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe g_ε intégrable sur $[a, b]$ telle que $|f(x) - g_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$.

4) Si f est intégrable sur $[a, b]$, alors $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$.

5) Si $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.

6) Si f et g sont intégrables sur $[a, b]$, alors le produit $f\,g$ est intégrable sur $[a, b]$.

7) Si f et g sont des fonctions continues sur $[a, b]$, alors la fonction $f\,g$ est encore continue sur $[a, b]$ et on a $\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt = \left(\int_a^b f(t)\, dt\right)\left(\int_a^b g(t)\, dt\right)$.

8) Soit μ un nombre réel et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels. On considère la fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie via $f(0) = \mu$ et, pour tout $n \geq 1$, $f(t) = \lambda_n$ sur $]\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$. Alors f est intégrable sur $[0,1]$.

9) Soit f une fonction bornée sur $[0,1]$, continue sauf au point $\frac{1}{2}$. Alors f est intégrable sur $[0,1]$.

10) Il existe $f \geq 0$ continue sur $[0,1]$ vérifiant $f(\frac{1}{2}) > 0$ et $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.

11) Soit f intégrable sur $[a,b]$. Si $\int_0^1 f(t)\,dt > 0$, alors $f \geq 0$ sur $[a,b]$.

12) Si f est croissante sur $[a,b]$, elle est intégrable sur $[a,b]$ et de plus $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ est croissante.

13) Si $f \leq 0$ est continue sur $[a,b]$, alors $G(x) = \int_x^b f(t)\,dt$ est croissante sur $[a,b]$.

14) Si f est continue sur $[0,1]$, la fonction $H(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,dt$ est dérivable sur $[0,1]$ et on a $H'(x) = f(x^2)$.

Exercice 3.5.2 *On désigne par E l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$. Pour tout $f \in E$, on note :*

$$I(f) := \left(\int_0^1 f(t)\ dt\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f(t)}\ dt\right)$$

et on pose $\Gamma = I(E) = \{I(f)\,;\, f \in E\} \subset \mathbb{R}_*^+$.

1) Déterminer $m := \inf\Gamma$. Cette valeur inférieure est-elle atteinte ? Si c'est oui, pour quelles fonctions de E a t'on $I(f) = m$?

2) Que vaut le nombre $\sup\Gamma$ *?*

4 Intégrales généralisées.

4.1 Introduction.

Pour l'intégrale de Riemann, on s'est limité à considérer des fonctions définies sur un *segment* $[a\,,\,b]$ de $\mathbb{R}$ et *bornées sur ce segment.* Soit maintenant une fonction f définie sur un intervalle borné $[a\,,\,b[$, bornée sur $[a\,,\,b[$ et telle que la restriction à tout segment $[a\,,\,x]$ de $[a\,,\,b[$ soit Riemann-intégrable.
On peut considérer la fonction $F : [a\,,\,b[\to \mathbb{K} : x \longmapsto F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.
On va montrer que $\lim\limits_{x\to b} F(x)$ existe et que si $\tilde{f}$ est un prolongement quelconque de f à l'intervalle $[a\,,\,b]$ (i.e. $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in [a\,,\,b[$ et $\tilde{f}(b) = \gamma \in \mathbb{K}$ arbitraire), alors $\tilde{f}$ est Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$ et son intégrale $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}(t)\,dt$ ne dépend pas du prolongement $\tilde{f}$ choisi.
De plus, on a $\lim\limits_{x\to b} F(x) = \lim\limits_{x\to b} \displaystyle\int_a^x f(t)dt = \int_a^b \tilde{f}(t)dt$.

Preuve
Soit M une constante telle que $\forall t \in [a\,,\,b[\,,\ |f(t)| \leqslant M$ et $M_\gamma = \max(M\,,\,|\gamma|)$.
Soit $\varepsilon > 0$ et b_ε tel que $a < b_\varepsilon < b$ et $M_\gamma(b - b_\varepsilon) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. La restriction de f au segment $[a\,,\,b_\varepsilon]$ étant Riemann-intégrable, il existe des fonctions en escalier $u_\varepsilon\,,\,v_\varepsilon$ sur $[a\,,\,b_\varepsilon]$ telles que :

$$u_\varepsilon \leqslant f \leqslant v_\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_a^{b_\varepsilon} (v_\varepsilon - u_\varepsilon)(t)dt \leqslant \varepsilon\,.$$

Considérons les fonctions en escalier sur $[a\,,\,b]$ définies par :

$\tilde{u}_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(t)$ et $\tilde{v}_\varepsilon(t) = v_\varepsilon(t)$ si $t \in [a\,,\,b_\varepsilon]$
$\tilde{u}_\varepsilon(t) = -M_\gamma$ et $\tilde{v}_\varepsilon(t) = M_\gamma$ si $t \in [b_\varepsilon\,,\,b]$.

On a alors sur $[a\,,\,b]$:

$$\tilde{u}_\varepsilon \leqslant \tilde{f} \leqslant \tilde{v}_\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_a^b (\tilde{v}_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon)(t)\,dt \leqslant \varepsilon + 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} = 2\varepsilon\,.$$

La fonction $\tilde{f}$ est donc Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$.

En utilisant la relation de Chasles, pour tout $x \in [a\,,\,b[$, on a :

$$\left|\int_a^b \tilde{f}(t)\,dt - F(x)\right| = \left|\int_x^b \tilde{f}(t)\,dt\right| \leqslant \int_x^b |\tilde{f}(t)|\,dt \leqslant M_\gamma(b - x)\,.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to b} F(x)$ existe et vaut $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}(t)\,dt$.
De plus, il résulte des propriétés de l'intégrale de Riemann que $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}(t)\,dt$ ne dépend pas du prolongement $\tilde{f}$ choisi de f au segment $[a\,,\,b]$: on ne change pas la valeur d'une intégrale en modifiant la fonction en un nombre fini de points. □

Ex. 5.1.1.
La fonction $f(t) = \sin\dfrac{1}{t}\,,\ t \in]0\,,\,1]\,,\ f(0) = \gamma$ est Riemann-intégrable sur $[0\,,\,1]$ et $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{t}\,dt$ existe au sens de Riemann.

4.2 Intégrale généralisée.

On va exploiter l'introduction pour étendre la notion d'intégrale à des fonctions non bornées sur un intervalle $[a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$) avec a et b bornés. On va prendre aussi en compte le cas de fonctions (bornées ou pas) définies sur $[a, b[$ avec b pouvant égaler $+\infty$ (resp. a pouvant égaler $-\infty$).

Définition 5.2.1 - *Fonction localement intégrable.*
Soit I un intervalle (quelconque) de $\mathbb{R}$. Une application $f : I \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est dite *localement intégrable sur* I si sa restriction à tout intervalle fermé borné (du type $[c, d]$ avec $-\infty < c \leq d < +\infty$) contenu dans I (on a $[c, d] \subset I$) est intégrable au sens de Riemann. △

Ex. 5.2.0.
Toute fonction f continue par morceaux sur I est localement intégrable sur I.

Définition 5.2.2 - *Intégrale généralisée sur* $[a, b[$.
Soit f une fonction localement intégrable sur $[a\,,\,b[\,, a \in \mathbb{R}$ et $a \leqslant b$ avec $b \in \mathbb{R}$, ou $b = +\infty$ (resp. sur $]a\,,\,b]\,, a \leqslant b$, avec $a \in \mathbb{R}$, ou $a = -\infty$).
Pour $x \in [a\,,\,b[$ on pose : $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ (resp. $F(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$ avec $x \in]a\,,\,b]$).
Alors, si la fonction $x \longmapsto F(x)$ admet une limite quand x tend vers b par valeurs inférieures (resp. x tend vers a par valeurs supérieures), on dit que f admet une intégrale généralisée sur $[a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$), notée :

$$\int_a^b f(t)\,dt := \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt \ \ \text{(resp.} \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\,dt)\,.$$

On dit aussi que l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ (resp. $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$) est convergente en $x = b$ (resp. $x = a$.).

Si, par contre, cette limite n'existe pas, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ (resp. $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$) est divergente en $x = b$ (resp. $x = a$). △

Ainsi, toute intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est soit convergente, soit divergente.

Etude de quelques exemples

Ex. 5.2.1. $f(t) = e^{-t}\,, t \in [0\,,+\infty[$

$F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est convergente et vaut 1.

Ex 5.2.2. $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}\,,\ \alpha \in \mathbb{R}\,, t \in]0\,,1]$

$$F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1}\,(1 - x^{-\alpha+1}) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\ell n\, x & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Ex 5.2.3. $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}\,,\ \alpha \in \mathbb{R}\,, t \in [1\,,+\infty[$

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1}\,(x^{-\alpha+1} - 1) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ell n\, x & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Ex 5.2.4. $f(t) = \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \in]a\,,\,b]$

Comme pour l'exemple 2, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Ex 5.2.5. $f(t) = \ell n\, t$, $t \in]0\,,\,1]$

$F(x) = \displaystyle\int_x^1 \ell n\, t\, dt = t(\ell n\, t - 1)\,|_x^1 = -1 - x(\ell n\, x - 1)$ tend vers -1 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ell n\, t\, dt$ est convergente et vaut -1.

Ex 5.2.6. $f(t) = \dfrac{1}{t(\ell n\, t)^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \in [2\,,\,+\infty[$

$$F(x) = \int_2^x \frac{dt}{t(\ell n\, t)^\alpha} = \int_{\ell n\, 2}^{\ell n\, x} \frac{ds}{s^\alpha}$$

i.e. $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1}\,(\ell n\, x)^{-\alpha+1} - (\ell n\, 2)^{-\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ell n(\ell n\, x) - \ell n(\ell n\, 2) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ell n\, t)^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 4.2.1 *Soient a, b et r trois nombres réels avec $a < b$ et $r < 1$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^r}\,dt$ est-elle convergente ? Et si $r \geq 1$?*

Exercice 4.2.2 *On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.*

1) En utilisant l'inégalité $\ell n\,(1+x) \leq x$ (qui est valable pour $x > -1$), montrer que :

$$\Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n \leq e^{-x} \leq \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^{-n}, \qquad \forall\, x \in [0, n]\,.$$

2) En déduire que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \Big(1 - \frac{t^2}{n}\Big)^n\, dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\, dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} 1/\Big(1 + \frac{t^2}{n}\Big)^n\, dt\,.$$

3) On pose $I_n := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^n\, d\theta$. On rappelle (voir l'exercice 4.4.7) que la suite $(I_n)_n$ est équivalente à la suite $\big(\sqrt{\pi/2\,n}\big)_n$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+u^2)^n}\, du$ est convergente et vaut I_{2n-2}.

4) Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$ est convergente et vaut $\sqrt{\pi}/2$.

Exercice 4.2.3 *On considère $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$.*

1) On suppose que f est une application continue par morceaux possédant une limite l en $+\infty$ et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente. Montrer que $l = 0$.

2) On suppose que f est une application uniformément continue et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente. Montrer que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

3) On suppose que f est une application uniformément continue. Montrer que $\int_0^\infty e^{i\, f(t)}\, dt$ est divergente.

Exercice 4.2.4 *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}$ *une fonction positive, continue et telle que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} f(t)^2\, dt$ *converge. Etablir le comportement asymptotique :*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)\ dt \ = \ 0\,.$$

Exercice 4.2.5 *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1 *telle que les deux intégrales* $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ *et* $\int_0^{+\infty} f'(t)^2\, dt$ *convergent. Montrer que* f *est bornée sur* $\mathbb{R}^+$.

Exercice 4.2.6 *On pose :*

$$I_n^x := \int_0^x \frac{dx}{(x+1)\cdots(x+n)}\,, \qquad n \geq 2\,, \qquad x \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}\,.$$

1) Montrer que l'intégrale généralisée $I_n^{+\infty}$ *est convergente.*

2) Réduire la fraction rationnelle en éléments simples et calculer I_n^x *pour* $x \in \mathbb{R}^+$.

3) Pourquoi a t'on :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!\ (n-k)!} \ = \ 0 \ ?$$

4) Calculer $I_n^{+\infty}$ *sous la forme d'une somme finie.*

Exercice 4.2.7 *Etude d'une fonction définie par une intégrale*

1) Calculer l'intégrale :

$$I \ := \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\ dx.$$

2) Soit $a \in \mathbb{R}^+$ *fixé. On considère l'intégrale :*

$$J_a(t) \ := \int_0^t \frac{x\ Arctg\,(a\,x)}{1+x^4}\ dx, \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$

Montrer que :

a) La fonction $t \longmapsto J_a(t)$ *est positive sur* $\mathbb{R}^+$.
b) La fonction $t \longmapsto J_a(t)$ *est croissante sur* $\mathbb{R}^+$.
c) La fonction $t \longmapsto J_a(t)$ *admet une limite finie* $f(a) > 0$ *lorsque* t *tend vers* $+\infty$.

3) Montrer que, a *et* x *étant positifs,* $Arctg\,(a\,x)$ *est inférieur à* $a\,x$. *En déduire un majorant pour* $J_a(t)$. *Comparer* $f(a)$ *à* $a\,I$. *Quelle est la limite de* $f(a)$ *lorsque* a *tend vers* $0+$ *?*

4) Montrer que l'intégrale généralisée :

$$\varphi(a) \ = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^4)\,(1+a^2\,x^2)}\ dx$$

est convergente, de valeur strictement positive.

5) Etudier suivant les valeurs de $b \in \mathbb{R}$ *la nature de l'intégrale généralisée :*

$$\psi(b) \ = \int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(1+x^4)\,(1+b^2\,x^2)^2}\ dx.$$

6) En appliquant la formule de Taylor :

$$\forall\, f \in C^2([a,b];\mathbb{R}), \quad \exists\, c \in]a,b[; \quad f(a+h) = f(a) + h\, f'(a) + h^2\, f''(c)/2$$

à la fonction $y \longmapsto Arctg\,(y\,x)$, montrer l'existence d'un c qui s'écrit $a+\theta\,h$ pour un certain $\theta\in]0,1[$ tel que l'on ait :

$$Arctg\,(a+h)\,x \;-\; Arctg\,(a\,x) \;=\; \frac{h\,x}{1+a^2\,x^2} \;-\; \frac{h^2\,c\,x^3}{(1+c^2\,x^2)^2}.$$

Pour $|h|<a/2$, montrer l'encadrement :

$$-\,\frac{3\,a}{2}\;h^2\;\psi\big(\frac{a}{2}\big)\;\le f(a+h)-f(a)-h\,\varphi(a)\;\le\;-\,\frac{a}{2}\;h^2\;\psi\big(\frac{3\,a}{2}\big).$$

En conclure que $f(a)$ est continue et dérivable quel que soit $a>0$ et que sa dérivée vaut $\varphi(a)$.
7) Calculer $\varphi(a)$ avec $a>0$.
8) En déduire $f(a)$ avec $a>0$.
9) Vérifier le résultat en calculant $f(1)$ à l'aide du changement de variable défini par $x=1/u$.

4.3 Cas des fonctions définies sur un intervalle ouvert $]a\,,\,b[\,,\;-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$.

Définition 5.3.1 - *Intégrable généralisée sur $]a,b[$.*
Soit f une fonction localement intégrable sur $]a\,,\,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On dit que l'intégrale de f sur $]a\,,\,b[$ est convergente si, pour un élément $c\in]a\,,\,b[$, chacune des intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ est convergente. On pose alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt\,.$$

Si l'une au moins des intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ est divergente, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est divergente. △

On remarque immédiatement, grâce à la relation de Chasles pour les fonctions intégrables au sens de Riemann, que cette définition ne dépend pas du point $c\in]a\,,\,b[$.

Préciser la *nature* d'une intégrale généralisée, c'est dire si cette intégrale est convergente ou divergente.

Ex. 5.3.1. $f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}\,,\;t\in]-\infty\,,\,+\infty[$

Alors $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=Arctg\,x$ a une limite quand x tend vers $+\infty$.

Et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$ est convergente et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

De même, $G(x)=\displaystyle\int_x^0 \frac{dt}{1+t^2}=-\,Arctg\,x$ a une limite quand x tend vers $-\infty$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0\frac{dt}{1+t^2}$ est convergente et vaut $-\left(\dfrac{-\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$ est convergente et vaut π.

Ex. 5.3.2. $f(t)=\dfrac{1}{t^\alpha}\;,\;\alpha\in\mathbb{R}\,,\;t\in]0\,,\,+\infty[$

Il résulte des exemples 5.2.2 et 5.2.3 que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$ est divergente pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 4.3.1 *Quelle est la nature (convergente ou divergente) des intégrales généralisées suivantes.*

i) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin t\;\sin\Big(\frac{1}{t}\Big)\;dt$; *ii)* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{\sin t}}{t}\;dt$; *iii)* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}+\sin t}\;dt\,.$

4.4 Propriétés de l'intégrale généralisée.

Proposition 5.4.1 - *Linéarité.*
Si f et g ont des intégrales convergentes sur $[a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$ ou $]a\,,\,b[$) et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f+g$ et $\lambda \cdot f$ ont aussi une intégrale convergente sur $[a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$ ou $]a\,,\,b[$) et on a :

$$\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$$

$$\int_a^b \lambda \cdot f(t)\,dt = \lambda \cdot \int_a^b f(t)\,dt\,.$$

Remarque
Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ est divergente, alors $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,dt$ est divergente.

Preuve
Il suffit de voir que, pour $x \in [a\,,\,b[$ on a :

$$\int_a^x (f+g)(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_a^x g(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_a^x \lambda \cdot f(t)\,dt = \lambda \cdot \int_a^x f(t)\,dt$$

et de faire tendre x vers b par valeurs inférieures.

Proposition 5.4.2 - *Relation d'ordre.*
Si f et g ont des intégrales convergentes sur $[a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$ ou $]a\,,\,b[$), et si pour tout $t \in [a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$ ou $]a\,,\,b[$), $f(t) \leqslant g(t)$ alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt\,.$$

La preuve est immédiate puisque, pour $x \in [a\,,\,b[$, $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \leqslant \int_a^x g(t)\,dt$.

Proposition 5.4.3 *Intégration par parties.*
Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,,\,b[$. Pour tout $x \in [a\,,\,b[$ on a :

$$\int_a^x f(t)\,g'(t) = f(x)\,g(x) - f(a)\,g(a) - \int_a^x f'(t)\,g(t)\,dt\,.$$

Alors, si $\displaystyle\lim_{x\to b} f(x)\,g(x)$ existe <u>et</u> si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt$ est convergente, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt$ est convergente et on a :

$$\int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt = \lim_{x\to b} f(x)\,g(x) - f(a)\,g(a) - \int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt\,.$$

Et, bien entendu, on a des énoncés analogues pour des fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a\,,\,b]$ ou $]a\,,\,b[$.

Exemple 5.4.1.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\cos\frac{1}{t}\,dt$ est convergente car, si $x \in]0\,,\,1]$ on a :

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,\cos\frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 t \cdot \left(\sin\frac{1}{t}\right)'\,dt = x\sin\frac{1}{x} - \sin 1 + \int_x^1 \sin\frac{1}{t}\,dt$$

et, comme $\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to 0}\int_x^1 \sin\frac{1}{t}\,dt = \int_0^1 \sin\frac{1}{t}\,dt$ existe, on obtient que $\int_0^1 \frac{1}{t}\cos\frac{1}{t}\,dt$ est convergente et vaut $-\sin 1 + \int_0^1 \sin\frac{1}{t}\,dt$.

Proposition 5.4.4 - *Changement de variable.*
Soient f une fonction continue sur $[a\,,\,b[$ et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha\,,\,\beta[$ à valeurs dans $[a\,,\,b[$.
Pour tout $x \in [\alpha\,,\,\beta[$ on a :

$$\int_\alpha^x f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(x)} f(s)\,ds\,.$$

Alors, si l'un des deux membres de cette égalité a une limite quand x tend vers β, l'autre membre aussi et ces limites sont égales :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \lim_{x\to\beta}\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(x)} f(s)\,ds\,.$$

Exemple 5.4.2.
L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\cos t\,dt$ est convergente car, si $x \in]0\,,\,1]$, on a :

$$\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\cos t\,dt = 2\int_{\sqrt{x}}^1 \cos(x^2)\,dx$$

et, comme $x \longmapsto \cos x^2 : [0\,,\,1] \to \mathbb{R}$ est continue, on obtient que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\cos t\,dt$ est convergente et que :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\cos t\,dt = 2\int_0^1 \cos(x^2)\,dx\,.$$

Exercice 4.4.1 *Quelle est la nature (convergente ou divergente) des intégrales généralisées suivantes.*

i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos\,t}{t}\,dt$; *ii)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(e^t\right)\,dt$; *iii)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2\,t}{t}\,dt$.

4.5 Intégrale généralisée d'une fonction positive ou nulle : fonctions intégrables.

Proposition 5.5.1.
Soit f une fonction localement intégrable sur $[a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$) et positive ou nulle. Pour que l'intégrale de f sur $[a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$) converge, il faut (et il suffit) qu'il existe une constante M positive telle que :

$$\forall x \in [a\,,\,b[\ \ (\text{resp.}]a\,,\,b])\quad,\quad \int_a^x f(t)\,dt \leqslant M\ \ (\text{resp.}\int_x^b f(t)\,dt \leqslant M)\,.$$

Preuve
En effet, la fonction $x \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (resp. $\int_x^b f(t)\,dt$) est monotone croissante et donc a une limite quand x tend vers b (resp. x tend vers a) si et seulement si F est majorée.

□

Corollaire 5.5.1.
Si f et g sont localement intégrables et positives ou nulles sur $[a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$) et si, pour tout $t \in]a\,,\,b[$, $f(t) \leqslant g(t)$, alors :

(i) Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ existe, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ existe et on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$.

(ii) Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ n'existe pas, il en est de même de $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$.

Ex. 5.5.1. $[a\,,\,b[=[1\,,\,+\infty[\,,\ f(t) := e^{-t^2}\,,\ g(t) := e^{-t}$

Comme, pour tout $t \in [1\,,\,+\infty[\,,\ 0 \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$, et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ existe (et vaut $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} -e^{-t}|_1^X = 1$), $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ existe.

On en déduit que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{-t^2}dt$ existe (écrire que $\displaystyle\int_a^X e^{-t^2}\,dt = \int_a^1 e^{-t^2}\,dt + \int_1^X e^{-t^2}\,dt$).

Ex. 5.5.2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t}$ est divergente car, pour $t \in \left]0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{\sin t}$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{t}$ est divergente.

Ex. 5.5.3. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t-1}}$ est convergente car chacune des intégrales $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t\sqrt{t-1}}$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t-1}}$ est convergente.

Corollaire 5.5.2.
Soient f et g deux fonctions localement intégrables et positives ou nulles sur $[a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$).
S'il existe deux constantes strictement positives k_1, k_2 telles que, pour tout $t \in]a\,,\,b[$ on ait :

$$k_1\,f(t) \leqslant g(t) \leqslant k_2\,f(t)\,.$$

Alors, pour que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ existe, il faut et il suffit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ existe.

Corollaire 5.5.3.
Soient f et g deux fonctions localement intégrables et positives ou nulles sur $[a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$).
Si $f(t) \sim g(t)$ lorsque t tend vers b (resp. tend vers a), alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ est convergente.

Ex. 5.5.4. $[a\,,\,b[=[1\,,\,+\infty[\,,\ f(t) := \dfrac{1}{t^\gamma}\,,\ g(t) := \dfrac{1}{\ell n\,t + t^\gamma}\,,\ \gamma > 0$

Alors $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$ et donc, puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$ est convergente si et seulement si $\gamma > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\ell n\,t + t^\gamma}$ est convergente si et seulement si $\gamma > 1$.

Ex. 5.5.5. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$ est convergente car $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^3}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{3(1-t)}}$ quand t tend vers 1.

Ex. 5.5.6. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t\ell n\,t}{t}\,dt$ est divergente car $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ell n\,t}{t}\,dt$ l'est.

En effet, pour $0 < x < 1$, on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ell n\,t}{t}\,dt = \int_{\ell n\,x}^0 s\,ds = -\frac{(\ell n\,x)^2}{2} \to \infty$ quand $x \to 0$.

4.6 Condition nécessaire et suffisante de convergence d'une intégrale généralisée : le critère de Cauchy.

Théorème
Soit f une fonction localement intégrable sur $[a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$).
Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ (resp. $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$) est convergente lorsque x tend vers b (resp. vers a) si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in [a\,,\,b[$ (resp. $]a\,,\,b]$) tel que :

$$(\star) \qquad \begin{matrix} x_\varepsilon<x'<x''<b \\ (\text{resp.} a<x'<x''<x_\varepsilon \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \left|\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

Preuve
Soit $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, F admettra une limite quand x tend vers b, par valeurs inférieures, si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de points de $[a\,,\,b[$ convergente vers b, la suite $(F(x_n))_n$ est convergente (cf. cours de première année), ce qui est équivalent à dire que la suite $(F(x_n))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$.
Or $F(x_q) - F(x_p) = \displaystyle\int_{x_p}^{x_q} f(t)\,dt$.

Par suite, si $(x_n)_n$ est une suite de points de $[a\,,\,b[$ convergente vers b, la condition $(\star)$ implique que la suite $(F(x_n))_n$ est de Cauchy, et donc qu'elle est convergente.
Réciproquement, si $\displaystyle\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} F(x)$ existe, et vaut $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in [a\,,\,b[$ tel que, pour tout $y \in [x_\varepsilon\,,\,b[$ on ait :

$$\left|F(y) - \int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Ainsi, si on a $x_\varepsilon < x' < x'' < b$, on aura :

$$|F(x'') - F(x')| = \left|\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

c'est-à-dire $(\star)$.

□

Exemple
L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$ est divergente pour tout $\alpha \leqslant 0$.
En effet, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\left|\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt\right| \;\geqslant\; (2n\pi)^{-\,\alpha} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin t\,dt = 2\cdot(2n\pi)^{-\,\alpha}$$

ce qui contredit le critère de Cauchy.

Définition - *Intégrale absolument convergente.*
Soit f une fonction localement intégrable sur $[a\,,\,b[$ (resp. sur $]a\,,\,b]$).
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ (resp. $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$) converge absolument en $x = b$ (resp. en $x = a$) si l'intégrale $\displaystyle\int_a^x |f(t)|\,dt$ (resp. $\displaystyle\int_x^b |f(t)|\,dt$) est convergente en $x = b$ (resp. en $x = a$).
De même, si f est localement intégrable sur $]a\,,\,b[$, on dit que l'intégrale de f sur $]a\,,\,b[$ est absolument

convergente si l'intégrale de $|f|$ sur $]a\,,\,b[$ est convergente (i.e. si pour un élément $c\in]a\,,\,b[$ chacune des intégrales $\displaystyle\int_a^c |f(t)|\,dt$ et $\displaystyle\int_c^b |f(t)|\,dt$ est convergente). $\triangle$

Il résulte de cette définition et du théorème précédent que :

Corollaire
Avec les hypothèses du théorème, si l'intégrale $\displaystyle\int_a^x |f(t)|\,dt$ (resp. $\displaystyle\int_x^b |f(t)|\,dt$) est convergente en $x=b$ (resp. $x=a$), l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ (resp. $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$) est convergente en $x=b$ (resp. $x=a$) et on a :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt\,.$$

En d'autres termes, si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente, elle est convergente.

Preuve
Cela résulte de l'inégalité :

$$a < x' < x'' < b \quad , \quad \left|\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt\right| \leqslant \int_{x'}^{x''} |f(t)|\,dt$$

et de l'inégalité :

$$a < x < b \quad , \quad \left|\int_a^x f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^x |f(t)|\,dt$$

(resp. $\displaystyle\left|\int_x^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_x^b |f(t)|\,dt$).

$\square$

4.7 Fonctions intégrables.

Définition - *Fonction intégrale sur I.*
Soient $I=(a\,,\,b)$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$ et $f:I\to\mathbb{K}$ une fonction localement intégrable sur I. On dit que f est intégrable sur I si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente. $\triangle$

En particulier, si I est un segment $[a\,,\,b]$ de $\mathbb{R}$ et f Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$, f est intégrable sur I car alors $|f|$ est aussi Riemann-intégrable sur $[a\,,\,b]$.

La proposition suivante donne un critère pratique commode pour reconnaître si $f:I\to\mathbb{K}$ est intégrable.

Proposition
Soient $I=(a\,,\,b)$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:I\to\mathbb{K}$ une fonction <u>localement intégrable sur I</u>.
Alors f est intégrable sur I si et seulement si il existe une fonction $g:I\to\mathbb{R}$ intégrable sur I telle que :

$$(\star) \qquad \forall t\in I \quad , \quad |f(t)|\leqslant g(t)\,.$$

Preuve
Soit $f:I\to\mathbb{K}$ intégrable sur I. Posons, pour tout $t\in I$, $g(t):=|f(t)|$.
La fonction g est localement intégrable sur I et, par définition, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ est convergente.

Réciproquement, supposons que $f : I \to \mathbb{K}$ soit localement intégrable sur I et satisfasse à la condition de domination ($\star$). La fonction g étant intégrable sur I, elle satisfait donc au critère de Cauchy aux extrémités a et, ou b de l'intervalle I.
Dans tous les cas, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des nombres réels A_ε, B_ε ($a < A_\varepsilon < B_\varepsilon < b$) tels que :

$$0 \leqslant \int_0^{A_\varepsilon} g(t)\,dt \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \int_{B_\varepsilon}^b g(t)\,dt\,.$$

On en déduit immédiatement que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt|$ satisfait le critère de Cauchy en a et b, et qu'elle est donc convergente : la fonction f est intégrable sur I.

□

4.8 Etude de quelques exemples.

Ex.1 L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ell n\,t \cdot \sin\frac{1}{t}\,dt$ est convergente.

En effet, $\forall t \in]0\,,\,1]$, $\left|\ell n\,t \cdot \sin\dfrac{1}{t}\right| \leqslant |\ell n\,t|$, et comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 |\ell n\,t|\,dt$ est convergente ($\displaystyle\int_x^1 (-\ell n\,t)\,dt = t(1-\ell n\,t)\,|_x^1 = 1 + x(\ell n\,x - 1)$), l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ell n\,t \cdot \sin\frac{1}{t}\,dt$ est absolument convergente, donc convergente.

Ex.2 L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ell n\,t \cdot \cos t}{t^{3/2}}\,dt$ est convergente car, pour tout $t \geqslant 1$:

$$\left|\frac{\ell n\,t \cdot \cos t}{t^{3/2}}\right| \leqslant \frac{\ell n\,t}{t^{3/2}} = \frac{\ell n\,t}{t^\varepsilon} \cdot \frac{1}{t^{3/2-\varepsilon}} \leqslant M_\varepsilon \cdot \frac{1}{t^{3/2-\varepsilon}} \quad , \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$$

où $M_\varepsilon = \sup\limits_{t \geqslant 1} \dfrac{\ell n\,t}{t^\varepsilon} < +\infty$ (remarquer que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ell n\,t}{t^\varepsilon} = 0$).
Et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2-\varepsilon}}$ est convergente puisque $\dfrac{3}{2} - \varepsilon > 1$, il en résulte que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ell n\,t \cdot \cos t}{t^{3/2}}\,dt$ est absolument convergente, donc convergente.

Ex.3 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,e^{-t}\,dt$ existe et vaut $n!$ car $t \longmapsto t^n\,e^{-t} : [0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$ est continue et, en écrivant $t^n\,e^{-t} = t^n\,e^{-t/2} \cdot e^{-t/2}$, et en remarquant que $\lim\limits_{t \to +\infty} t^n\,e^{-t} = 0$, il vient que :

$$\forall t \geqslant 0 \quad , \quad t^n\,e^{-t} \leqslant c_n\,e^{-t/2} \quad \text{avec}\, c_n = \sup_{t \geqslant 0} t^n\,e^{-t/2} < +\infty\,.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t/2}$ étant convergente, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,e^{-t}\,dt$ est aussi convergente.

Soit alors $X > 0$, et calculons $\displaystyle\int_0^X t^n\,e^{-t}\,dt$. En intégrant par parties, il vient que :

$$\int_0^X t^n\,e^{-t}\,dt = -X^n\,e^{-X} + n\int_0^X t^{n-1}\,e^{-t}\,dt\,.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,e^{-t}\,dt = n\int_0^{+\infty} t^{n-1}\,e^{-t}\,dt$, $n \geqslant 1$.

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$, on obtient que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,e^{-t}\,dt = n!$.

Application : Développement asymptotique de la transformée de Laplace.

Proposition
Soit $f : [0\,,+\infty[\to\mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^m$, dont la dérivée d'ordre $m\geqslant 1$ est bornée sur $[0\,,+\infty[$. Alors, pour tout $\lambda>0$, la transformée de Laplace de f, $F(\lambda):=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\cdot f(t)\,dt$ est convergente. De plus, lorsque λ tend vers $+\infty$, on a :

$$F(\lambda) \;=\; \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\cdot\lambda^{-(k+1)} + 0\,(\lambda^{-(m+1)})\,.$$

Preuve
La formule de Taylor à l'ordre m pour f donne, pour tout $t\in[0\,,+\infty[$:

$$f(t) \;=\; \sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot t^k+\frac{t^m}{m!}\cdot f^{(m)}(\theta)\quad,\quad \theta\in[0\,,t]\,.$$

Si C désigne une borne de $|f^{(m)}|$ sur $[0\,,+\infty[$, on obtient :

$$|f(t)|\leqslant\sum_{k=0}^{m-1}\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!}\cdot t^k+C\cdot\frac{t^m}{m!}$$

ce qui prouve que l'intégrale $F(\lambda)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,f(t)\,dt$ est (absolument) convergente et, comme pour tout entier $k\geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\cdot t^k\,dt=k!\cdot\lambda^{-(k+1)}$ (poser $s=\lambda\cdot t$), on déduit le développement asymptotique de $F(\lambda)$ annoncé.

Ex.4 Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, l'intégrale $I_n:=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ est convergente et on a :

$$I_{2n+1}=2^n\cdot n!\qquad,\qquad I_{2n}=\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}\cdot I_0$$

avec $I_0=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$. On verra au dernier chapitre que $I_0=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. En effet, $f(t):=t^n\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue, positive sur $[0\,,+\infty[$ et vérifie pour $t\geqslant 2$, $f(t)\leqslant t^n\cdot e^{-t}$: I_n est donc convergente. De plus, en intégrant par parties, pour tout $X>0$, on a :

$$\int_0^X t^n\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \;=\; -\,t^{n-1}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,|_0^X+(n-1)\int_0^X t^{n-2}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\,.$$

En faisant tendre X vers $+\infty$, on obtient la formule de récurrence $I_n=(n-1)\,I_{n-2}$ de laquelle on déduit les expressions de I_{2n+1} (puisque $I_1=\displaystyle\int_0^{+\infty} t\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=1$) et I_{2n} en fonction de I_0.

Comme pour l'application précédente, on obtient la :

Proposition
Soit $f : [0\,,+\infty[\to\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^m$, dont la dérivée d'ordre $m\geqslant 1$ est bornée sur $[0\,,+\infty[$. Alors, pour tout $\lambda>0$, l'intégrale $I(\lambda):=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda\frac{t^2}{2}}\,f(t)\,dt$ est convergente. De plus, lorsque λ tend vers $+\infty$, on a :

$$I(\lambda)\;=\;\sum_{k=0}^{m-1}\frac{I_k}{k!}\,f^{(k)}(0)\cdot\lambda^{-\frac{k+1}{2}}+0(\lambda^{-\frac{m+1}{2}})\,.$$

Ex.5 L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

En effet, on sait déjà que cette intégrale est divergente pour $\alpha \leqslant 0$ (critère de Cauchy non satisfait).

Pour $\alpha > 1$, on a : $\forall t \geqslant 1\,,\ \left|\dfrac{\sin t}{t^\alpha}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^\alpha}$ et, comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente pour $\alpha > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$ est absolument convergente, donc convergente : la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1\,,\,+\infty[$ pour $\alpha > 1$.

Pour $0 < \alpha \leqslant 1$, considérons pour tout $X > 1$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{X} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$. En intégrant par parties on a :

$$\int_1^X \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt \;=\; \cos 1 - \frac{\cos X}{X^\alpha} - \alpha\int_1^X \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt\,.$$

Comme précédemment, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt$ est absolument convergente puisque $\alpha + 1 > 1$, et donc comme $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\cos X}{X^\alpha}$ existe, et vaut 0, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$ est convergente et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt = \cos 1 - \alpha\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,dt$.

Remarque

Pour $\alpha > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$ est convergente si et seulement si $\alpha < 2$ car l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$ est convergente si et seulement si $\alpha < 2$.

Ex.6 L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Compte tenu de l'exemple 4, il nous suffit de vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,dt$ est divergente pour $\alpha \leqslant 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et considérons $F(n\pi) = \displaystyle\int_1^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,dt$. On a :

$$F(n\pi) = \int_1^{\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,dt + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,dt\,.$$

Or $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,dt \geqslant \int_{k\pi+\pi/4}^{(k+1)\pi-\pi/4} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,dt \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{k\pi+\pi/4}^{(k+1)\pi-\pi/4} \frac{dt}{t^\alpha} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{((k+1)\pi)^\alpha}\,.$

La série $\left[\dfrac{1}{k^\alpha}\right]_{k\geqslant 1}$ étant divergente (puisque $\alpha \leqslant 1$), on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F(n\pi) = +\infty$ et donc :

$$\lim_{X\to+\infty} F(X) = \lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,dt = +\infty\,.$$

Remarques

(1) On déduit de ce calcul que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1\,,\,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$, et cependant l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$ existe pour tout $\alpha > 0$.

(2) De même, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[0\,,\,+\infty[$ si et seulement si $1 < \alpha < 2$, et cependant l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$ existe pour tout $0 < \alpha < 2$.

Ex.7 L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \sin\frac{1}{t}\,dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > -2$.

En effet, pour $0 < x < 1$, on a :

$$\int_x^1 t^\alpha \sin\frac{1}{t}\,dt = \int_1^{1/x} \frac{\sin s}{s^{\alpha+2}}\,ds$$

et cette expression a une limite quand $x \to 0^+$ si et seulement si $\alpha + 2 > 0$, i.e. $\alpha > -2$ (cf. exemple 4).

Ex.8 (Inégalité de Hardy)

Proposition

Soient $f : [0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et g la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par :

$$\begin{aligned} g(t) &:= \frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds \quad \text{si } t \neq 0 \\ g(0) &:= f(0) \end{aligned}$$

Alors g est continue sur $[0\,,+\infty[$, dérivable sur $]0\,,+\infty[$.

De plus, si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|^2\,dt$ est convergente, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |g(t)|^2\,dt$ est aussi convergente et on a :

$$\int_0^{+\infty} |g(t)|^2\,dt \;=\; \int_0^{+\infty} \left|\frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds\right|^2 dt \;\leqslant\; 4\int_0^{+\infty} |f(t)|^2\,dt$$

Preuve

Que g soit continue et dérivable sur $]0\,,+\infty[$ résulte des propriétés de l'intégrale. En particulier, on a :

$$\forall t \in \,]0\,,+\infty[\quad , \quad (tg)'(t) = f(t)$$

i.e. $g'(t) = \dfrac{1}{t}\,f(t) - \dfrac{1}{t}\,g(t)$.

Par ailleurs, puisque $g(t) - g(0) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t (f(s) - f(0))\,ds$, et que f est continue en 0, on obtient que $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} (g(t) - g(0)) = 0$ (cf. Chapitre IV - §4).

Soient ε et X tels que $0 < \varepsilon < X$. En effectuant une intégration par parties, on obtient :

$$\int_\varepsilon^X |g(t)|^2\,dt \;=\; \varepsilon[g(\varepsilon)]^2 - X[g(X)]^2 \;+\; 2\int_\varepsilon^X f(t)\cdot g(t)\,dt\,.$$

En faisant tendre ε vers 0, cela donne :

$$\int_0^X |g(t)|^2\,dt \;=\; 2\int_\varepsilon^X f(t)\cdot g(t)\,dt - X[g(X)]^2 \;\leqslant\; 2\int_\varepsilon^X f(t)\cdot g(t)\,dt\,.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\int_0^X |g(t)|^2\,dt \;\leqslant\; 2\left(\int_0^X |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^X |g(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

i.e. $\displaystyle\int_0^X |g(t)|^2\,dt \;\leqslant\; 4\int_\varepsilon^X |f(t)|^2\,dt \;\leqslant\; 4\int_0^{+\infty} |f(t)|^2\,dt\,.$

Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |g(t)|^2\,dt$ est convergente et vérifie :

$$\int_0^{+\infty} |g(t)|^2\,dt \;\leqslant\; 4\int_0^{+\infty} |f(t)|^2\,dt\,.$$

□

Exercice 4.8.1 *On considère la fonction* $f\,:\,I \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x) \,=\, (2+x)^{-1}\ |\ell n\,(1+x)|^{-3/2}\ \sin x\,, \qquad x \in I =]-1,+\infty[\,.$$

1) Soit $J = (\alpha, \beta)$ *avec* $-1 \le \alpha < \beta \le +\infty$. *Rappeler ce que signifie "*f *est localement intégrable sur l'intervalle* J*".*

2) On partage l'intervalle I *selon :*

$$I\ =]-1,-1/2] \cup [-1/2, 0[\cup]0,2] \cup [2,+\infty[\,.$$

Expliquer pourquoi f *est localement intégrable sur chacun des quatre sous-intervalles ainsi mis à jour.*

3) Déterminer la limite de f *lorsque* $x \in I$ *tend vers* -1. *Quelle est la nature de l'intégrale généralisée* $\int_{-1}^{-1/2} f(x)\ dx$ *? Justifier.*

4) Donner un équivalent de f *lorsque* x *tend vers* 0. *Quelles sont les natures des intégrales généralisées* $\int_{-1/2}^{0} f(x)\ dx$ *et* $\int_0^2 f(x)\ dx$ *? Justifier.*

5) Montrer que :

$$|f(x)| \,\le\, x^{-1}\ (\ell n\, x)^{-3/2}\,, \qquad \forall\, x \in [2,+\infty[\,.$$

6) Calculer $\int_2^{+\infty} x^{-1}\ (\ell n\, x)^{-3/2}\ dx$.

7) Expliquer pourquoi f *est intégrable (c'est à dire absolument convergente) sur l'intervalle* $[2,+\infty[$.

8) Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\int_{-1}^{+\infty} f(x)\ dx$ *? Justifier.*

9) Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\int_{-1}^{+\infty} (2+x)^{-1}\ \sin x\ dx$ *? Justifier.*

Exercice 4.8.2 *Soit* $f\,:\,[0\,,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ *continue telle que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ *soit convergente.*
Montrer que, pour $\lambda > 0$, *la transformée de Laplace de* $f \quad F(\lambda) := \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)\,dt$ *est convergente.*
(Indication : Effectuer une intégration par parties en introduisant la primitive $\phi(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ *de* f *sur* $[0\,,+\infty[$ *qui s'annule en* $t=0$*).*