AG3: Algèbre et Géométrie 3

Contrôle continu n°2 (Durée 1H)

Questions de cours :

1. Rappeler la définition d'un idéal.
2. Enoncer le théorème de Gauss dans $\mathbb{K}[X]$.
3. Donner un exemple d'un corps qui est fini.

Exercice 1

On considère les deux polynômes suivants :

$$P = X^3 - X^2 - X - 2, \qquad Q = X^2 - X - 2\,.$$

1. Déterminer le PGCD de P et Q qu'on notera $P \wedge Q$.

2. Trouver deux polynômes $(U, V) \in \mathbb{R}[X]$ tels que $PU + QV = P \wedge Q$.

3. En déduire le PPCM de P et Q.

Exercice 2

Soit a et b deux nombres complexes distincts, m et n deux entiers naturels.

1. Déterminer le PGCD de $(X - a)^m$ et $(X - b)^n$.

2. Démontrer que si les polynômes $(X - a)^m$ et $(X - b)^n$ divisent un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, alors le polynôme $(X - a)^m(X - b)^n$ divise P.

3. Démontrer que si les polynômes $(X - a)^m$ et $(X - b)^n$ sont premiers avec un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, alors $(X - a)^m(X - b)^n$ est premier avec P.

Exercice 3

Soit $(A, +, \times)$ un anneau principal (commutatif et intègre).

1. Démontrer que l'intersection de toute suite d'idéaux de A est un ideal de A.

2. On suppose que toute suite décroissante (pour l'inclusion) d'idéaux de A est stationnaire. Montrer que A est un corps.