PROPOSITION DE SUJETS DE LECTURE DIRIGÉE

GOULWEN FICHOU

1. Géométrie 0-minimale

Le principe des structures o-minimales (ou de la géométrie o-minimale) est qu'il n'existe pas de "monstres" dans ces structures. Un exemple de monstre est le graphe Γ de la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ pour $x > 0$, qui est connexe mais pas connexe par arcs, ou encore dont l'intersection avec la demi-droite réelle positive contient une infinité de points.

Les structures o-minimales fournissent un contexte pour une géométrie modérée dans laquelle de telles pathologies ne peuvent exister. Un but du travail pourrait être d'étudier le nombre de composantes connexes de ces ensembles.

Références :

(1) M. Coste, An introduction to O-minimal geometry, Pisa
(2) L. van den Dries, Tame topology and O-minimal structures

2. Corps réel clos

Un corps réel est un corps que l'on peut munir d'une relation d'ordre. Par exemple $\mathbb{R}$, mais aussi $\mathbb{Q}$ ou encore le corps des séries de Laurent $\mathbb{R}(X)$. Un corps réel clos est alors l'analogue d'un corps algébriquement clos, mais en la présence d'un ordre. Par exemple $\mathbb{R}$, ou le corps des nombres réels algébriques.

On peut montrer que le langage des corps réel clos admet l'élimination des quantificateurs (une formule du premier ordre dans ce langage peut être décrite par une autre formule, mais sans quantificateurs).

Référence :

(1) J. Bochnack, M. Coste, M.F. Roy : Real algebraic geometry, Springer

3. Théorème de Puiseux

Le théorème de Puiseux décrit la clôture algébrique du corps des fractions des séries formelles sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Du point de vue géométrique il donne une paramétrisation des branches d'une courbe plane.

Références :

(1) Walker, Algebraic curves, Springer
(2) J. M. Ruiz, The basic theory of power series, Pisa