Plan de l'exposé

1. Le problème original posé par Kakeya

2. Premières solutions

3. La solution de Besicovitch

4. Mesure et dimension de Hausdorff

5. La conjecture de Kakeya

6. Implications de la conjecture

Séminaire des doctorants

IRMA, Université Louis Pasteur

Jürgen Angst

24 Novembre 2006

Autour du problème de Kakeya

ou “Petit problème deviendra grand...”

1. Le problème original posé par Kakeya

En 1917, dans un article intitulé “Some problems on maximum and minimum regarding ovals”, le mathématicien japonais S. Kakeya propose le problème suivant :

> Trouver une figure plane d’aire minimale dans laquelle un segment de longueur 1 peut effectuer une rotation de $360°$ de façon continue.

Plan

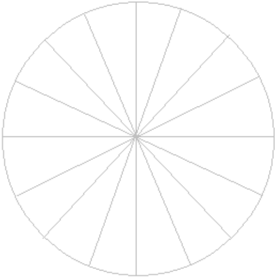
R

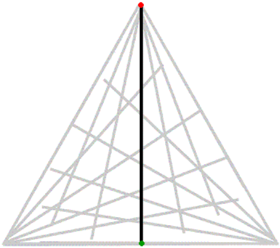
P.E

F

Q

Exemples de mouvements possibles :

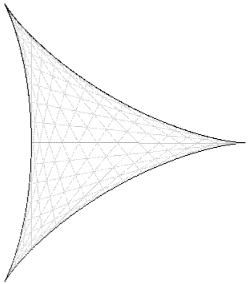


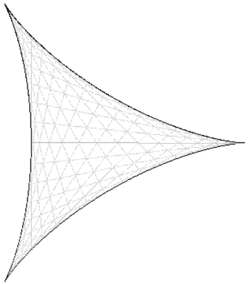


Aire du cercle : $\pi/4$

Aire du triangle : $1/\sqrt{3}$

Kakeya conjecture que la solution minimale est le deltoïde d'aire $\pi/8$, :





Une paramétrisation possible du deltoïde est :

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$$

2. Premières solutions

En 1921, le mathématicien hongrois Julius Pál montre que si l'on se restreint aux ensembles convexes, la solution minimale est le triangle équilatéral de hauteur 1, l'aire valant alors $1/\sqrt{3}$.

Dans les années 1970' (*i.e.* bien après la solution générale de Besicovitch), Cunningham montre que pour un ensemble étoilé, l'aire est supérieure à $\pi/108$. Il traite aussi le cas des ensembles simplement connexes.

3. La solution de Besicovitch

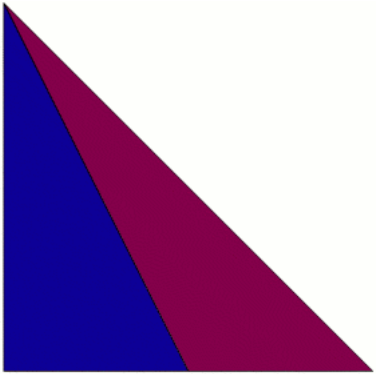
En 1920, alors qu'il ignore le problème posé par Kakeya, Besicovitch résoud un problème équivalent. Il montre en effet que :

> Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble du plan qui contient un segment unitaire dans toutes les directions et dont la mesure de Lebesgue est plus petite que ϵ.

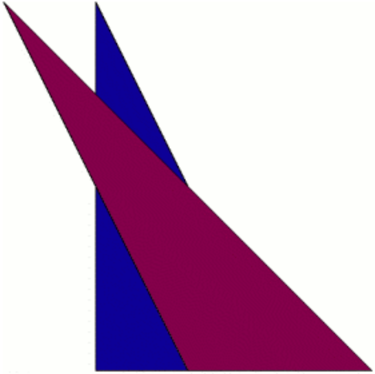
Quelques années plus tard, ayant pris connaissance des travaux de Kakeya, il adapte sa preuve et montre que l'aire correspondant au retournement continu du segment unitaire est arbitrairement petite.

Une construction possible : l'arbre de Perron

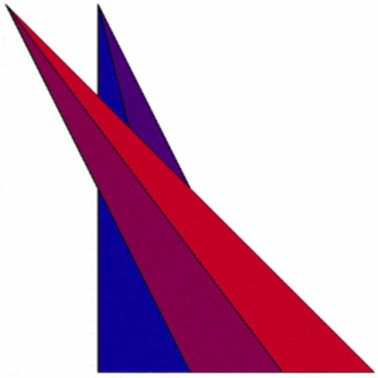
Une construction possible : l'arbre de Perron :



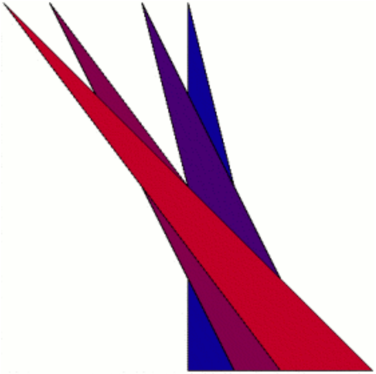
Une construction possible : l'arbre de Perron :



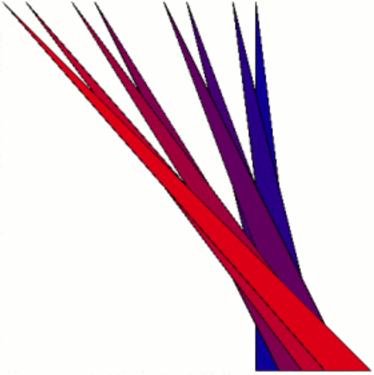
Une construction possible : l'arbre de Perron :



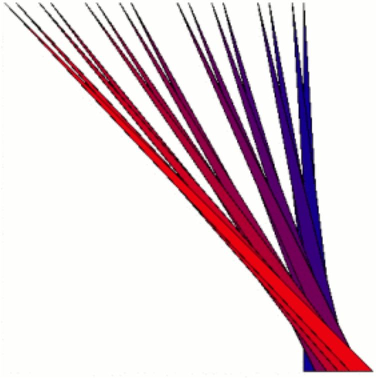
Une construction possible : l'arbre de Perron :



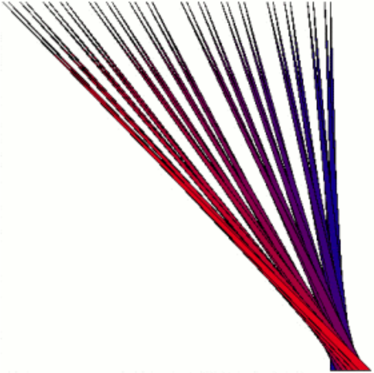
Une construction possible : l'arbre de Perron :



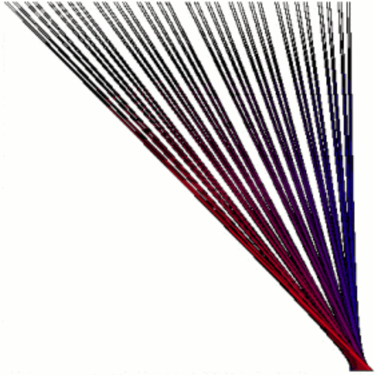
Une construction possible : l'arbre de Perron :



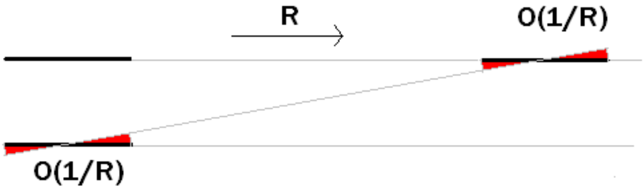
Une construction possible : l'arbre de Perron :



Une construction possible : l'arbre de Perron :



Pour obtenir une solution au sens de Kakeya (en tenant compte de la continuité du mouvement), il suffit que de remarquer que l'on peut translater le segment unité, cela en payant un prix arbitrairement petit.



En utilisant habilement la dualité, Besicovitch montre en fait le résultat suivant :

> Il existe des ensembles du plan qui contiennent un segment unitaire dans toutes les directions et dont la mesure de Lebesgue est nulle.

De tels ensembles sont aujourd'hui appelés ensembles de Besicovitch ou ensembles de Kakeya. Le résultat ci-dessus met en évidence le fait que la mesure de Lebesgue n'est pas une mesure adaptée à ce type d'objets.

4. Mesure et dimension de Hausdorff

Soit E un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$, on appelle son diamètre la quantité :

$$diam(E) = \sup(|x - y| : x \in E, y \in E)$$

Soient Θ une famille de sous ensembles de $\mathbb{R}^n$ et ζ une fonction positive sur Θ vérifiant :

$$\begin{cases} (i) \quad \forall \delta > 0,\ \exists (E_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \Theta,\ \mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \text{ et } diam(E_i) \leq \delta \\ (ii) \quad \forall \delta > 0,\ \exists E \in \Theta,\ \zeta(E) \leq \delta \text{ et } diam(E) \leq \delta \end{cases}$$

Pour $0 < \delta < \infty$ et $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on pose alors :

$$\psi_\delta(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \zeta(E_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, diam(E_i) \leq \delta, E_i \in \Theta\}$$

On pose

$$\psi(A) = \lim_{\delta \to 0} \psi_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \psi_\delta(A) \in [0; +\infty]$$

Pour $0 \leq d < \infty$ la mesure de Hausdorff de dimension d sur $\mathbb{R}^n$, notée H^d, est la mesure obtenue en prenant :

$$\Theta = \{\text{les fermés de } \mathbb{R}^n\}, \quad \zeta(E) = diam(E)^d.$$

La dimension de Hausdorff d'un sous-ensemble X de $\mathbb{R}^n$ est :

$$\begin{aligned} dim_H(X) &= \sup\{s : H^s(X) > 0\} = \sup\{s : H^s(X) = \infty\} \\ &= \inf\{t : H^t(X) < \infty\} = \inf\{t : H^t(X) = 0\} \end{aligned}$$

L'expression ci dessus signifie que les deux suprema et minima coïncident toujours et que la dimension est leur valeur commune. On a toujours : $0 \leq dim_H(X) \leq n$ et si $s < dim_H(X) < t$ alors $H^s(X) = \infty$ et $H^t(X) = 0$

L'ensemble C de Cantor vérifie

$$dim_H(C) = \log(2)/\log(3).$$

Par construction même de l'ensemble triadique de Cantor, si $(I_k)_{k\in[|1,2^n|]}$ désigne les segments de l'ensemble de Cantor à l'étape n on a :

$$\begin{aligned} H^d_{(1/3)^n}(C) &= \inf\{\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} diam(E_i)^d : C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, diam(E_i) \leq (1/3)^n\} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{2^n} diam(I_k)^d = 2^n(1/3)^{nd} = \exp(n(\log(2) - d\log(3)) \end{aligned}$$

On a alors

$$dim_H(C) = \inf\{t : H^t(X) = 0\} = \frac{\log(2)}{\log(3)} \sim 0.6309$$

5. La conjecture de Kakeya

Dans le cas de la dimension 2, on montre que si F est un ensemble de Besicovitch, alors $dim_H(F) = 2$, il est alors assez naturel de faire la conjecture suivante :

> En dimension n, si F est un ensemble de Besicovitch, alors $dim_H(F) = n$.

• Contre-exemples en théorie de l'intégration : à l'origine Besicovitch a "inventé" les ensembles de Besicovitch pour répondre par la négative à une question sur l'intégrale de Riemann.

• Les ensembles de Besicovitch jouent un rôle fondamental en analyse de Fourier. En 1971 C. Fefferman (médaillé Fields) a montré que : pour $d \geq 2$, l'application

$$f \to \int_{|\xi| \leq 1} \widehat{f}(\xi) e^{ix.\xi} d\xi$$

définit, seulement pour $p = 2$, un opérateur borné sur $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^d)$. Un argument clef de la preuve de Fefferman est l'existence d'un ensemble de Besicovitch.

• Deux conjectures fondamentales en analyse harmonique (la conjecture de Bochner Riesz et la conjecture de restriction) impliquent la conjecture de Kakeya.

• Des techniques developpées pour étudier la conjecture de Kakeya sont aussi utilisées en théorie des nombres. Par exemple

Théorème (Green-Tao, 2004) :
L'ensemble des nombres premiers contient des progressions arithmétiques de longueur arbitraire.

• Une série de Dirichlet est une somme de la forme

$$\sum_{n=N}^{2N} a_n n^{it}.$$

Les séries de Dirichlet sont liées à la distribution des zéros de la fonction ζ de Riemann, donc à la distribution des nombres premiers. D'autre part, des conjectures concernant ces séries impliquent la conjecture de Kakeya.