PROBABILITÉS ET STATISTIQUE
Série 10

Exercice 1.

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$ et $\mathbb{P}(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2}$. Montrer que cette suite converge presque sûrement, mais pas en moyenne.
2. Trouver une suite de variables aléatoires qui converge en moyenne mais pas presque sûrement.

Exercice 2.

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires qui converge en moyenne vers une variable X. Montrer que $\mathbb{E}X_n \longrightarrow \mathbb{E}X$. Est-ce que la réciproque est vraie?
2. On suppose que $X_n \xrightarrow{r} X$. Montrer que $\mathbb{E}|X_n|^r \longrightarrow \mathbb{E}|X|^r$.
(Indication: penser au théorème de Minkowski.)
3. On suppose que $X_n \xrightarrow{2} X$. Montrer que $\mathrm{Var}(X_n) \longrightarrow \mathrm{Var}(X)$.

Exercice 3. *Crise financière : la faute aux matheux ?*
Le prix S_n d'une action au jour n est modélisé de la façon suivante : $S_0 = s > 0$ est fixé, et pour $n \geq 0$, $S_{n+1} = (1 + r + \sigma\varepsilon_{n+1})S_n$, où $r > 0$ est un taux fixe, $\sigma \in]0, 1 + r[$ représente la volatilité du marché (supposée constante et connue), et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite i.i.d. de variables de Bernoulli $B(\pm 1, 1/2)$.

1. Étudier le comportement des suites $\log(S_n)/n$ et S_n ;
2. Étudier le comportement de la suite $\log(S_n)/\sqrt{n}$;
3. Étudier le comportement de la suite $\left((1 + r)^2 - \sigma^2\right)^{(-\sqrt{n}/2)} S_n^{1/\sqrt{n}}$.

Exercice 4. *Loi des grands nombres et dépendance*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi de Bernoulli $B(p)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$Y_n := X_n X_{n+1}, \quad \text{et} \quad S_n := \frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n}.$$

1. Calculer la loi et l'espérance de Y_n, puis la corrélation entre Y_n et Y_{n+k} ;
2. Calculer l'espérance de S_n^2 et montrer que S_n converge en probabilité vers p^2.

Exercice 5. *Approximation polynomiale des fonctions continues*
Soient f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et g une fonction continue bornée de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Soient $p \in [0, 1]$ et $\lambda > 0$.

1. Étudier la convergence, lorsque n tend vers l'infini, de la suite
$$P_n(p) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$
2. Étudier la convergence, lorsque n tend vers l'infini, des suites
$$Q_n(p) := e^{-\lambda n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda n)^k}{k!} g\left(\frac{k}{n}\right), \quad \text{et} \quad \widetilde{Q}_n(p) := e^{-\lambda n} \sum_{k=0}^{\lfloor \lambda n \rfloor} \frac{(\lambda n)^k}{k!} g\left(\frac{k}{n}\right).$$