Liste d'exercices 6

Exercice 1 :

Soient $(U_j,\, j \in \mathbb{N}^*)$ une suite i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$, et $\alpha > 0$. a) Montrer que $Y_n := \exp\left(\frac{\alpha}{n} \times \log\left(\prod_{j=1}^n U_j\right)\right)$ converge en probabilité, et donner sa limite. b) Montrer que $e^{\alpha\sqrt{n}} \times Y_n^{\sqrt{n}}$ converge en loi, et trouver sa limite.

Exercice 2 :

Le prix S_n d'une action au jour n est modélisé ainsi : $S_0 = s > 0$ est fixé, et $S_{n+1} = (1 + r + \sigma\varepsilon_{n+1})S_n$, où $r > 0$ est un taux fixe, $\sigma \in]0, 1 + r[$ est une volatilité fixe, et $(\varepsilon_n,\, n \in \mathbb{N})$ est une suite i.i.d. de loi de Bernoulli $B(\pm 1, 1/2)$.
a) Etudier le comportement des suites $(\log S_n)/n$ et S_n.
b) Etudier le comportement de la suite $(\log S_n)/\sqrt{n}$.
c) Etudier le comportement de la suite $\left[(1 + r)^2 - \sigma^2\right]^{\left(-1/(2\sqrt{n})\right)} \times S_n^{1/\sqrt{n}}$.

Exercice 3 :

Notons $(X_n, Y_n, Z_n,\, n \in \mathbb{N}^*)$ une famille de v.a.i.i.d. de loi commune $B(\pm 1, 1/2)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$R_n := \sum_{k=1}^n X_k Y_k,\ S_n := \sum_{k=1}^n Y_k Z_k,\ T_n := \sum_{k=1}^n X_k Z_k, \ \text{ et } \ V_n := (R_n, S_n, T_n).$$

a) R_n, S_n et T_n sont-elles indépendantes 2 à 2 ? indépendantes ? b) Quelle est la loi de R_n ?
c) Calculer la transformée de Fourier de V_n. d) Etudier la convergence de V_n/n , puis de $V_n/\sqrt{n}$.

Exercice 4 :

a) Soient $p \in [0, 1]$ et f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Étudier la convergence de la suite

$$n \to \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

b) Soient $\lambda > 0$ et g une fonction continue bornéee de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Étudier la convergence de la suite

$$n \to e^{-\lambda n} \sum_{k \geq 0} \frac{(\lambda n)^k}{k!} g\left(\frac{k}{n}\right).$$

Exercice 5 :

Une association compte 292 membres. Elle doit voter pour l'adoption d'un projet P proposé par un groupe G composé de 150 individus. Les membres appartenant à G votent indépendamment les uns des autres pour le projet P avec une probabilité 0,9 et contre avec une probabilité 0,1 ; tandis que les membres n'appartenant pas à G votent indépendamment pour P avec une probabilité 0,5 et contre avec une probabilité 0,5. On suppose que tous les membres de l'association votent, qu'il n'y a ni bulletin blanc, ni bulletin nul. Calculer une valeur approchée de la probabilité p que le projet P soit adoptée avec une majorité des 3/4 au moins, ainsi que de la probabilité p' qu'il le soit à la majorité simple.

Exercice 6 :

Une caractéristique électrique d'un composant électronique varie, du fait des dispersions de fabrication, suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \mu^2)$. On se propose d'estimer son espérance μ par un intervalle de confiance. Un prélèvement de 20 composants effectué sur un lot de série a donné les résultats suivants : 10,1 ; 10,5 ; 9,4 ; 10,2 ; 9,5 ; 9,8 ; 10,1 ; 10,3 ; 10,6 ; 9,7 ; 10,2 ; 10,4 ; 10,3 ; 9,6 ; 9,9 ; 9,8 ; 10,1 ; 10,3 ; 10,5 ; 9,8 . (moyenne = 10, 055).
a) Construire un intervalle de confiance pour μ de niveau de confiance 90 %. Est-il le plus court parmi tous les intervalles de confiance de niveau de confiance 90% ? b) Construire un intervalle de confiance pour de niveau de confiance 95%.

Exercice 7 :

La fiabilité dans le temps d'un composant électrique, c'est-à-dire sa durée de vie X, est supposée de type exponentiel : $\mathbb{P}(X \geq t) = \exp(-t/\lambda)$. On cherche à estimer à l'aide d'un intervalle de confiance le paramètre λ. Si la moyenne observée d'un échantillon est x, donner un intervalle de confiance de niveau de confiance 90% du paramètre λ. Est-il le plus court parmi tous les intervalles de confiance de niveau de confiance 90% ?

Exercice 8 :

Ayant lu dans le magazine ELLE du 19.8.02 que 55% des françcais utilisaient des bains moussants, vous décidez de vérifier vous-même l'affirmation du magazine ELLE par un mini-sondage, en posant autour de vous la question : “Utilisez-vous des bains moussants ? OUI, NON” et en construisant un intervalle de confiance sur une proportion. a) Vous envisagez de ne considérer l'affirmation comme confirmée que si cet intervalle de 90% basé sur le groupe des personnes interrogées est inclus dans $[54\%, 56\%]$. Est-ce possible ? b) Découragé(e) par la réponse obtenue en a, vous vous contentez d'un échantillon de 50 personnes. Si la proportion de oui est de 53% parmi les 50 réponses, déterminez un intervalle de confiance de 90% .

Exercice 9 :

Deux associés A et B se partagent les taches d'un cabinet commun de conseil. L'associé A pense qu'il traite moins de 30% des dossiers. Pour vérifier cela, il décide de choisir au hasard un échantillon de 100 dossiers (traités soit par lui-même, soit par l'associé B), sur lesquels il prévoit d'effectuer deux tests, avec le même risque de rejet à tort de 5%, en prenant successivement comme hypothèse nulle

$$i) \;\; H_0 : p \leq 30\%, \qquad ii) \;\; H_0 : p \geq 30\%,$$

p étant la proportion réelle des dossiers traités par A.
a) Pour combien de dossiers traités par A (au plus) l'hypothèse $H_0 : p \leq 30\%$ est-elle acceptée (ou conservé) ?
b) Pour combien de dossiers traités par A (au plus) $H_0 : p \geq 30\%$ est-elle rejetée ?
c) Déterminer la probabilité d'accepter l'hypoth'ese H_0 si la proportion réelle de dossiers traités par A est de 40%.
d) Déterminer la probabilité de rejeter l'hypothèse H_0 si la proportion réelle de dossiers traiées par A est de 40%.