Correction du contrôle continu

Exercice 1 :

a) Distribuer une main à un joueur de poker revient à choisir 5 cartes parmi les 52 du jeu. L'ensemble des résultats possibles correspondant à la ditribution de cinq mains successives est donc $\Omega := \{\text{choix de 5 cartes parmi 52}\}^5$. Cet ensemble est fini de cardinal $|\Omega| = (C_{52}^5)^5$, on le munit de la tribu de ses parties $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$. L'énoncé nous invite à choisir sur $(\Omega, \mathcal{F})$ la probabilité uniforme $\mathbb{P}$, toutes les mains étant équiprobables.

b) En choisissant la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$, on fait de facto l'hypothèse que les 5 mains distribuées sont indépendantes et ont même loi. Cette loi n'est autre que la probabilité uniforme $\mathbb{P}_1$ sur l'espace mesurable $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ qui modélise l'ensemble des résultats possibles pour une main : $\Omega_1 = \{\text{choix de 5 cartes parmi 52}\}$ et $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega_1)$. Pour chaque main, les probabilités d'avoir un full et un carré sont donc respectivement : $\mathbb{P}_1(\text{avoir un full})$ et $\mathbb{P}_1(\text{avoir un carré})$. La probabilité $\mathbb{P}_1$ étant la probabilité uniforme, on a

$$\mathbb{P}_1(\text{avoir un full}) = \frac{\text{nb de full}}{|\Omega_1|} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}_1(\text{avoir un carré}) = \frac{\text{nb de carré}}{|\Omega_1|}.$$

Un full est déterminé par la valeur du brelan ($C_{13}^1 = 13$ valeurs possibles), les couleurs des 3 cartes qui composent le brelan ($C_4^3 = 4$ combinaisons de couleurs possibles), la valeur de la paire ($C_{12}^1 = 12$ valeurs possibles) et les couleurs des 2 cartes qui la composent ($C_4^2 = 6$ combinaisons de couleurs possibles). Un full ne peut être ni un carré (puisqu'il n'y a pas de carte libre), ni une quinte flush (puisque les 3 cartes du brelan ont des couleurs différentes). Au total, on obtient nb de full $= C_{13}^1 C_4^3 C_{12}^1 C_4^2 = 13 \times 48 \times 6$.
Un carré est lui déterminé par la valeur du carré ($C_{13}^1 = 13$ valeurs possibles), et par la carte libre ($C_{52-4}^1 = C_{48}^1 = 48$ possibilités). On a donc nb de carré $= C_{13}^1 C_{48}^1 = 13 \times 48$. Finalement, on trouve

$$\mathbb{P}_1(\text{avoir un full}) = \frac{13 \times 48 \times 6}{C_{52}^5}, \qquad \mathbb{P}_1(\text{avoir un carré}) = \frac{13 \times 48}{C_{52}^5},$$

et bien entendu $\mathbb{P}_1(\text{avoir un full}) = 6 \times \mathbb{P}_1(\text{avoir un carré})$.

c) La probabilité d'avoir au moins carré dans les cinq mains est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{avoir au moins un carré}) &= 1 - \mathbb{P}(\text{ne pas avoir de carré du tout}) \\
&= 1 - \mathbb{P}_1(\text{ne pas avoir de carré})^5 \quad \text{par indépendance} \\
&= 1 - (1 - \mathbb{P}_1(\text{avoir de carré }))^5 \\
&= 1 - \left(1 - \tfrac{13\times 48}{C_{52}^5}\right)^5 \approx 0.0012.
\end{aligned}$$

Comme la probabilité d'avoir un full à la première donne est donnée par $\mathbb{P}_1(\text{avoir un full}) = 13 \times 48 \times 6 / C_{52}^5 \approx 0.0014$, on conclut que $\mathbb{P}(\text{avoir au moins un carré}) < \mathbb{P}_1(\text{avoir un full})$.

Exercice 2 :

a) On note M pour majorité, O pour opposition, et Oui/Non si le député vote Oui/Non au projet de loi. D'après l'énoncé, on a alors :

$$\mathbb{P}(M) = 1 - \mathbb{P}(O) = 2/3, \quad \mathbb{P}(Oui \mid M) = 4/5, \quad \mathbb{P}(Oui \mid O) = 1/10.$$

En appliquant la formule des probabilités totales, on trouve :

$$\mathbb{P}(Non) = \mathbb{P}(Non \mid M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(Non \mid O)\mathbb{P}(O) = 1/5 \times 2/3 + 9/10 \times 1/3 = 13/30.$$

b) On inverse le conditionnement :

$$\mathbb{P}(M \mid Non) = \frac{\mathbb{P}(M \cap Non)}{\mathbb{P}(Non)} = \frac{\mathbb{P}(Non \mid M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(Non)} = \frac{1/5 \times 2/3}{13/30} = 4/13.$$

Exercice 3 :

a) En faisant la somme sur les indices j on obtient que pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=1}^{4} \mathbb{P}\left(X = i \ \text{ et } \ Y = j\right) = \frac{4i + 10}{80}.$$

On vérifie que la somme des probabilités $\mathbb{P}(X = i)$ donne bien 1 :

$$\sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(X = i) = \frac{4}{80} \times (1 + 2 + 3 + 4) + \frac{4 \times 10}{80} = 1.$$

La donnée des probabilités $\mathbb{P}(X = i)$, $i = 1, \ldots, 4$, caractérise la loi de X. Par symétrie, la loi de Y est la même que celle de X.

b) D'après la question précédente, on a $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = 14/80$. Le produit des probabilités $\mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 1)$ est donc égal à $(14/80)^2 \approx 0.031$. Par ailleurs, par définition on a

$$\mathbb{P}\left(X = 1 \ \text{ et } \ Y = 1\right) = (1 + 1)/80 = 1/40 = 0.025.$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}\left(X = 1 \ \text{ et } \ Y = 1\right) \neq \mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 1),$$

i.e., les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 4 :

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p, et l'on note $X \sim \mathcal{G}(p)$, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$ telle que

$$\mathbb{P}(X = k) = p \times (1-p)^{k-1}, \quad \text{pour tout } \ k \in \mathbb{N}^*.$$

a) Calculons tout d'abord $\mathbb{P}(X > \ell)$ pour $\ell \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > \ell) \quad &= \mathbb{P}(X \geq \ell + 1) = \sum_{k=\ell+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=\ell+1}^{+\infty} p \times (1-p)^{k-1} \\
&= p \times (1-p)^{\ell} \times \sum_{k=\ell+1}^{+\infty} (1-p)^{k-1-\ell} = p \times (1-p)^{\ell} \times \sum_{k'=0}^{+\infty} (1-p)^{k'} \\
&= p \times (1-p)^{\ell} \times \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^{\ell}.
\end{aligned}$$

Par définition de la probabilité conditionnelle, pour $k, \ell \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}(X > k + \ell \mid X > k) = \frac{\mathbb{P}(X > k + \ell \ \cap \ X > k)}{\mathbb{P}(X > k)}.$$

Or $\{X > k + \ell \ \cap \ X > k\} = \{X > k + \ell\}$, on a donc d'après le calcul précédent

$$\mathbb{P}(X > k + \ell \mid X > k) = \frac{\mathbb{P}(X > k + \ell)}{\mathbb{P}(X > k)} = \frac{(1-p)^{k+\ell}}{(1-p)^{k}} = (1-p)^{\ell} = \mathbb{P}(X > \ell).$$

b) Nous allons caractériser la loi de Z grâce à sa fonction de répartition. Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$\mathbb{P}(Z > \ell) = \mathbb{P}(\min(X, Y) > \ell) = \mathbb{P}(X > \ell \ \text{ et } \ Y > \ell).$$

Les variables X et Y étant indépendantes, on a donc

$$\mathbb{P}(Z > \ell) = \mathbb{P}(X > \ell) \times \mathbb{P}(Y > \ell) = (1-p)^{\ell} \times (1-q)^{\ell} = (1 - (p + q - pq))^{\ell}.$$

Si l'on pose $\mathfrak{p} = (p + q - pq)$, on obtient donc que pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(Z > \ell) = (1 - \mathfrak{p})^{\ell},$$

et l'on conclut que la loi de Z est une loi géométrique de paramètre $\mathfrak{p}$.