

Devoir à rendre pour le 14 novembre 2008

Exercice 1 :

Une main de poker est la donnée de 5 cartes dans un jeu de $52 = 13 \times 4$ cartes. Un carré est une main qui contient quatre cartes de même valeur. Un full est une main composée de 3 cartes de même valeur + 2 cartes de même valeur. On mélange les cartes avant de les distribuer aux joueurs, de sorte que l'on pourra supposer qu'à chaque donne toutes les mains sont équiprobables.

- Donner un espace de probabilité permettant de modéliser les mains distribuées à un joueur au cours de cinq donnes successives.
- Montrer qu'à chaque donne, la probabilité d'avoir un full est six fois plus grande que la probabilité d'avoir un carré. (Justifiez vos calculs)
- Est-il plus probable d'avoir un full dans la première main, ou d'avoir au moins un carré dans les cinq mains?

Exercice 2 :

À l'assemblée nationale deux tiers des députés appartiennent à la majorité. Au cours du vote pour un projet de loi, quatre députés de la majorité sur cinq votent oui au projet. Parmi les députés de l'opposition, seul un député sur dix vote oui au projet.

- Quelle est la probabilité qu'un député vote non au projet?
- On choisit au hasard un député parmi ceux qui ont voté non, quelle est la probabilité qu'il appartienne à la majorité?

Exercice 3 :

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ tel que

$$\mathbb{P}(X = i \text{ et } Y = j) = \frac{i+j}{80} \quad \text{pour tout } i, j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

- Déterminer la loi de X et celle de Y .
- Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 4 :

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p , et l'on note $X \sim \mathcal{G}(p)$, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ telle que

$$\mathbb{P}(X = k) = p \times (1 - p)^{k-1}, \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

- Montrer que pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}(X > k + \ell \mid X > k) = \mathbb{P}(X > \ell)$.
- Soient $p \neq q$ et X, Y deux variables indépendantes de loi respectives $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$. Déterminer la loi de la variable $Z = \min(X, Y)$.