Analyse I

Série 14

1. a) Démontrer que si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont deux suites de Cauchy, alors la suite formée du produit terme à terme de $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$, i.e. $\{a_nb_n\}$, est aussi une suite de Cauchy.
   b) On définit pour deux suites de Cauchy $\{s_n\}$ et $\{v_n\}$ une relation d'équivalence,
   $$\{a_n\} \sim \{b_n\} \quad \text{si} \quad \forall \epsilon > 0 \; \exists N \geq 1 \mid \forall n \geq N \; |s_n - v_n| < \epsilon.$$
   Démontrer que si $\{a_n\} \sim \{s_n\}$ et $\{b_n\} \sim \{v_n\}$, alors $\{a_nb_n\} \sim \{s_nv_n\}$. Ceci veut dire que la définition du produit de deux nombres réels à l'aide du produit terme par terme des suites correspondantes est indépendant du choix des représentants.
2. Soit $\{s_n\}$ une suite qui satisfait pour $n \geq N$
   $$|s_{n+1} - s_n| \leq \alpha |s_n - s_{n-1}| \quad \text{avec} \quad 0 \leq \alpha < 1.$$
   Démontrer que $\{s_n\}$ est une suite de Cauchy.
3. Donner deux démonstrations différentes pour la convergence de la suite $\{s_n\}$, donnée par
   $$s_1 = 1, \quad s_n = \sqrt{3s_{n-1}}.$$
   Indications. La suite est monotone et bornée (quelle est sa limite ?). On peut également appliquer le critère de l'exercice précédent.
4. (Leonardo da Pisa, alias Fibonacci 1206). La *suite de Fibonacci* est définie par
   $$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{pour } n \geq 2.$$
   Calculer les premiers termes de la suite ainsi que le rapport $r_n = F_n/F_{n-1}$. Démontrer que $\{r_n\}$ est une suite de Cauchy et calculer la limite de cette suite, le résultat devrait être le nombre d'or.
   Indication. Démontrer par récurrence que $3/2 \leq r_n \leq 2$ pour $n \geq 2$, et utiliser le critère de l'exercice 2.
5. Prouver que si s est le seul point d'accumulation d'une suite bornée $\{s_n\}$, alors la suite est convergente et $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Puis montrer par un contre exemple que cette propriété n'est pas vraie pour des suites non-bornées.
6. Soit α un nombre irrationnel. On considère la suite $\{s_n\}$ définie par
   $$s_n = (n\alpha) \mod 1, \tag{1}$$
   i.e. $s_n \in]0,1[$ est égal à $n\alpha$ mais auquel on a ôté la partie entière. Calculer les 11 premiers termes et faire un dessin. Démontrer que *deux* de ces nombres sont séparés d'une distance de moins de 1/10. Conclure que pour tout $x \in [0,1]$, il existe un s_n de la suite (1) tel que
   $$|x - s_n| < 1/10.$$
   Généraliser et conclure que chaque $x \in [0,1]$ est un point d'accumulation de la suite (1).
   P.S. Ce procédé est très populaire (mais pas très bon) pour générer des suites pseudo-aléatoires sur ordinateur.
7. Calculer les limites suivantes :
   $$\limsup_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}(n + 1/n)\right) \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} \cos(\pi(n + 1/n))$$