Analyse I

Série 11

1. Résoudre l'équation différentielle pour la *tractrice*, c'est à dire la fonction $y = y(x)$ liée à sa derivée $y'(x) = dy(x)/dx$ par la rélation :

$$y' = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

(Utiliser la substitution $v = \sqrt{a^2 - y^2}$).

2. Résoudre l'équation différentielle pour la *brachistochrone*, c'est à dire la fonction $y = y(x)$ liée à sa derivée $y'(x) = dy(x)/dx$ par la rélation :

$$y' = \sqrt{\frac{c - y}{y}}.$$

(Utiliser la métode de séparation des variables et la substitution $y = c \sin^2 u$.)

3. Résoudre l'équation différentielle

$$y' = \frac{4 + y^2}{4 + x^2} .$$

4. Résoudre l'équation différentielle de la "croissance logistique" (Verhulst 1845)

$$y' = ay(b - y), \qquad a = 5, \quad b = 2.$$

Pour chaque couple (x_0, y_0) avec $0 \leq y_0 \leq b$, déterminer une solution $y(x)$ définie pour tout x $(-\infty < x < \infty)$ et satisfaisant $y(x_0) = y_0$. Esquisser les solutions et observer que deux solutions sont soit identiques, soit partout distinctes.

5. (Joh. Bernoulli 1697). Résoudre l'équation différentielle "de mon Frére"

$$y' = g(x) \cdot y + f(x) \cdot y^n \tag{1}$$

en introduisant une nouvelle fonction $v(x)$ définie par $y = v^\beta$. Insérer cela dans (1) et déterminer la constante β de manière à ce que (1) devienne une équation linéaire pour v. Appliquer cette méthode à

$$y' + y + e^x y^3 = 0.$$

6. Démontrer qu'une équation différentielle de la forme

$$y' = G\left(\frac{y}{x}\right)$$

peut être résolue grâce à la substitution $v(x) = y(x)/x$. Appliquer cette méthode à

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y .$$

7. (Clairaut 1734). Considérons une équation différentielle de la forme

$$y = xy' - f(y') \tag{2}$$

où, par exemple, $f(c) = 5(c^3 - c)/2$ (voir le dessin (b) de la série 8).

a) Montrer que les droites

$$y(x) = cx - f(c) \tag{3}$$

sont solutions de (2).

b) Calculer l'enveloppe de la famille de droites (3) et démontrer qu'elle représente aussi une solution de (2).

8. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' = -\frac{gR^2}{y^2}$$

où $g = 9.81$ m/sec^2, $R = 6.36 \cdot 10^6$m. Déterminer les constantes de la solution pour satisfaire $y(0) = R$ et $y'(0) = V$ où V est une constante donnée. Chercher ensuite la vitesse minimale V pour laquelle le corps disparaît à l'infini.

9. Trouver la solution de l'équation

$$y'' + y^2 \cdot y' = 0$$

qui satisfait les conditions initiales $y(1/4) = 2\sqrt{3/2}$, $y'(1/4) = -4\sqrt{3/2}$.