Analyse I

Série 6

1. Calculer numériquement les fractions continues pour les nombres

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\quad \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{5}$$

et découvrir une différence significative entre les racines quadratiques et cubiques.

2. Calculer les réduites de $\sqrt{2}$ et π pour $k = 1, 2, 3, 4$ suivant deux méthodes différentes :
   · en troncant la fraction continue,
   · en utilisant la formule récursive donnée au cours.

3. Démontrer que le numérateur A_k et le dénominateur B_k de la $k$ème réduite peuvent être obtenus par la formule matricielle suivante,

$$\begin{pmatrix} A_k & A_{k-1} \\ B_k & B_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ p_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 & 1 \\ p_2 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} q_{k-1} & 1 \\ p_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_k & 1 \\ p_k & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que les deux types de fractions continues

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \dots}}}} \quad \text{et} \quad \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \dots}}}}$$

sont solution d'une équation de degré deux. Calculer leur valeur.

5. La durée d'une année astronomique est de (Euler 1748, §382)

365 jours 5 heures 48'55".

Calculer le développement de 5 heures 48'55" (mesurés en jours) en une fraction continue et chercher les réduites correspondantes. Le Pape Grégoire XIII aurait apprécié vos précieux conseils pour la réforme de son calendrier.

6. Démontrer les deux égalités suivantes

$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \dots}}}}} = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{3}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{5}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{7}{x} - \dots}}}}.$$

Indication : (Legendre 1794) Définir

$$\varphi(z) = 1 + \frac{a}{1 \cdot z} + \frac{a^2}{1 \cdot 2 \cdot z(z+1)} + \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot z(z+1)(z+2)} + \dots$$

et montrer que $\varphi(z) - \varphi(z+1) = \dfrac{a}{z(z+1)}\varphi(z+2)$. Puis, définir

$$\psi(z) = \frac{a \cdot \varphi(z+1)}{z \cdot \varphi(z)} \quad \text{de sorte que} \quad \psi(z) = \frac{a}{z + \psi(z+1)}. \tag{1}$$

L'itération de (1) donne une fraction continue. Finalement, poser $a = x^2/4$ pour que $\varphi(1/2) = \cosh x$ et $x\varphi(3/2) = \sinh x$, et remplacer x par ix.