Correction des exercices du cours de Probabilités

Exercice n°6.1 :

► Soit V un vecteur gaussien de moyenne $m = \mathbb{E}(V) \in \mathbb{R}^d$ et de matrice de variance K_V . D'après la proposition 11, le vecteur V a même loi que le vecteur $MU + m$ où M est une matrice telle que $K_V = MM^*$ (M^* désigne la transposée de M) et le vecteur U est un vecteur gaussien centré de variance $Id_{\mathbb{R}^d}$. Soit $a \in \mathbb{R}^d$, on a alors

$$\mathbb{E}e^{ia^*V} = \mathbb{E}e^{ia^*(MU+m)} = e^{ia^*m} \mathbb{E}e^{i(M^*a)^*U}$$

D'après le corollaire 5 et la proposition 13 on a

$$\mathbb{E}e^{i(M^*a)^*U} = e^{-\frac{i}{2}(M^*a)^*(M^*a)} = e^{-\frac{i}{2}a^*(MM^*)a} = e^{-\frac{i}{2}a^*K_Va}$$

On conclut donc que

$$\mathbb{E}e^{ia^*V} = e^{ia^*m - \frac{i}{2}a^*K_Va}$$

► Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et ϵ une variable indépendante de X de loi uniforme sur $\{-1, +1\}$. Soit f une fonction continue bornée, alors

$$\mathbb{E}(f(\epsilon X)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(-x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

On peut donc affirmer que ϵX est encore une variable gaussienne centrée réduite.

► En revanche le vecteur $(X, \epsilon X)$ n'est pas un vecteur gaussien, en effet $X + \epsilon X$ n'est pas gaussienne car si f est continue bornée :

$$\mathbb{E}(f(X + \epsilon X)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(2x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx + \frac{1}{2} f(0)$$

► Le fait qu'une combinaison linéaire de gaussiennes indépendantes est une gaussienne est immédiat au vu du corollaire 5 et de la proposition 13. Pour un contre exemple, prendre le vecteur (X, X) où X est gaussienne, alors $X - X = 0$ n'est pas gaussienne.

► Pour les questions suivantes, il suffit d'écrire les choses...

Exercice n°6.2 : Utiliser le corollaire 6

Exercice n°6.3 :

► Pour étudier la convergence en loi de Y_n , on va regarder la convergence simple de sa fonction caractéristique (*i.e* sa transformée de Fourier). Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}e^{ixY_n} = \mathbb{E}e^{ix \sum_{j=1}^n a_{n-j} X_j} = e^{-\frac{x^2}{2} \sum_{j=1}^n a_{n-j}^2}$$

Par hypothèse $\sigma^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j^2 < \infty$, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} e^{ixY_n} = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 x^2}$$

On peut donc affirmer que la suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ converge en loi vers une variable $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

► On montre que les variables Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes grâce à leur transformées de Fourier, en effet si $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{i(uY_n + vY_{n+1})} &= \mathbb{E} e^{i(u a_{n-1} + v a_n) X_1 + (u a_{n-2} + v a_{n-1}) X_2 + \dots + (u a_0 + v a_1) X_n + v a_0 X_{n+1}} \\ \mathbb{E} e^{i(uY_n + vY_{n+1})} &= e^{-\frac{1}{2} [(u a_{n-1} + v a_n)^2 + (u a_{n-2} + v a_{n-1})^2 + \dots + (u a_0 + v a_1)^2 + v^2 a_0^2]} \end{aligned}$$

Or $a_j a_{j+1} = 0$ donc en développant les carrés, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{i(uY_n + vY_{n+1})} &= e^{-\frac{1}{2} (u^2 a_{n-1}^2 + v^2 a_n^2) + (u^2 a_{n-2}^2 + v^2 a_{n-1}^2) + \dots + (u^2 a_0^2 + v^2 a_1^2) + v^2 a_0^2} \\ \text{i.e. } \mathbb{E} e^{i(uY_n + vY_{n+1})} &= e^{-\frac{1}{2} u^2 \sum_{j=1}^n a_{n-j}^2} e^{-\frac{1}{2} v^2 \sum_{j=1}^{n+1} a_{n+1-j}^2} = \mathbb{E} e^{iuY_n} \times \mathbb{E} e^{ivY_{n+1}} \end{aligned}$$

On conclut par le corollaire 5.

► Soit Y la limite trouvée à la première question. Comme les variables X_i sont indépendantes et identiquement distribuées on voit facilement que la loi de $Y - Y_n$ est la même que celle de $\sum_n^{+\infty} a_j X_j$. Or

$$\mathbb{E} (Y - Y_n)^2 = \sum_n^{+\infty} a_j^2 \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty$$

On conclut que (Y_n) converge vers Y dans $\mathbb{L}^2$

Exercice n°6.4 :

Soit $V = (V_0, \dots, V_d)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance :

$$K = \begin{pmatrix} 1 & p & p & \dots & p \\ p & 1 & p^2 & \dots & p^2 \\ p & p^2 & 1 & \dots & p^2 \\ \vdots & \vdots & p^2 & \ddots & p^2 \\ p & p^2 & \dots & p^2 & 1 \end{pmatrix}$$

► Le vecteur $W = (V_0, W_1, \dots, W_d)$ s'écrit $W = A \times V$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -p & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -p & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ -p & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que $A \times K \times A^* = Id_{\mathbb{R}^{d+1}}$, on a donc $W \sim \mathcal{N}_{d+1}(0, Id_{\mathbb{R}^{d+1}})$

► La transformée de Fourier de S est donnée par

$$\mathbb{E}e^{itS} = \mathbb{E}e^{it\sum_{j=1}^d V_j} = \mathbb{E}e^{iu \times V}$$

où $u = (0, t, \dots, t)$, d'après le corollaire 6 :

$$\mathbb{E}e^{itS} = e^{-\frac{1}{2}u^*Ku} = e^{-\frac{1}{2}t^2(d+d(d-1)p^2)}$$

On conclut que si $\sigma^2 = (d + d(d-1)p^2)$ alors $S \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Exercice n°6.5 :

Les calculs ne posant pas de difficultés particulières, on donne les résultats à titre de vérification. Comme d'habitude, si $p \in [0, 1]$ on pose $q = 1 - p$.

Loi	$\mathcal{B}(n, p)$	$\mathcal{G}(p)$	$\mathcal{P}(\lambda)$
F. génératrice	$(q + ps)^n$	$ps/(1 - qs)$	$e^{-\lambda(1-s)}$

Loi	$\mathcal{U}_{[1, n]}$	$\mathcal{B}(n, p)$	$\mathcal{G}(p)$	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathcal{U}_{[a, b]}$	$\mathcal{E}(\lambda)$
F. caractéristique	$\frac{e^{it}(1 - e^{int})}{n(1 - e^{it})}$	$(q + pe^{it})^n$	$\frac{p}{e^{-it} - q}$	$e^{\lambda(e^{it} - 1)}$	$\frac{e^{i bt} - e^{i at}}{it(b - a)}$	$\frac{\lambda}{\lambda - it}$

Exercice n°6.6 : Voir le cours

Exercice n°6.7 :