

CORRECTION DU DEVOIR EN TEMPS LIBRE 3 (pour le 11.12.07)

Exercice 1 : (exercice 5.8)

Le temps d'attente T de C n'est autre que $T = X \wedge Y$. D'après l'exercice 5.4, $T \sim \mathcal{E}(2\lambda)$

L'évènement $\{C \text{ sort le dernier}\}$ s'écrit $\{T + Z > X \vee Y\} = \{X \vee Y - T < Z\}$. Or d'après l'exercice 5.4, la variable $X \vee Y - T$ est indépendante de T (et de Z) et suit une loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On a donc

$$\mathbb{P}(C \text{ sort le dernier}) = \mathbb{P}(U < V),$$

où U et V sont indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Par symétrie, il vient alors

$$\mathbb{P}(C \text{ sort le dernier}) = \mathbb{P}(U < V) = \frac{1}{2}.$$

Le temps du dernier départ est $S = (T + Z) \vee (X \vee Y) = T + (Z \vee [(X \vee Y) - T])$. On a vu que $[(X \vee Y) - T] \sim \mathcal{E}(\lambda)$ est indépendante de T . On montre facilement que $[(X \vee Y) - T]$ est indépendante de $Z \sim \mathcal{E}(\lambda)$, ($Z \vee [(X \vee Y) - T]$) a donc même loi que $X \vee Y$ et est indépendante de T . La loi de S est donc celle de $U + (V \vee W)$ où U, V, W sont des variables indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Exercice 2 : moments et fonction caractéristique

Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, et $Z \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$, alors on a

$$\mathbb{E}[e^{itX}] = (1-p) + pe^{it}, \quad \mathbb{E}[e^{itY}] = \int_{\mathbb{R}^+} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}, \quad \mathbb{E}[e^{itZ}] = \int_0^1 e^{itx} dx = \frac{e^{it} - 1}{it}.$$

En dérivant en zéro, on trouve

$$\mathbb{E}[X] = p, \quad \mathbb{E}[X^2] = p, \quad \text{donc} \quad \text{var}(X) = p(1-p),$$

$$\mathbb{E}[Y] = \lambda^{-1}, \quad \mathbb{E}[Y^2] = 2\lambda^{-2}, \quad \text{donc} \quad \text{var}(Y) = \lambda^{-2},$$

$$\mathbb{E}[Z] = 1/2, \quad \mathbb{E}[Z^2] = 1/3, \quad \text{donc} \quad \text{var}(Z) = 1/12.$$

Exercice 3 : sur les lois de Weibull

En la densité $\phi_{(k,\lambda)}$, on reconnaît la dérivée de la fonction $x \mapsto -e^{-(\frac{x}{\lambda})^k}$, on a donc :

$$\mathbb{P}(X > x) = \int_x^{+\infty} \left(\frac{k}{\lambda}\right) \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(\frac{y}{\lambda})^k} dy = \left[-e^{-(\frac{y}{\lambda})^k}\right]_x^{+\infty} = e^{-(\frac{x}{\lambda})^k},$$

$$\text{et } \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - e^{-(\frac{x}{\lambda})^k}.$$

Calculons l'espérance de X . On a vu que pour une variable positive :

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > x) dx.$$

En faisant le changement de variable $u = (x/\lambda)^k$, i.e., $dx = (\lambda/k)u^{1/k-1}du$, on obtient

$$\mathbb{E}[X] \int_0^{+\infty} e^{-(\frac{x}{\lambda})^k} dx = \frac{\lambda}{k} \int_0^{+\infty} u^{1/k-1} e^{-u} du = \frac{\lambda}{k} \Gamma\left(\frac{1}{k}\right) = \lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Calculons (un moins la) la fonction de répartition de la variable Y . Soit $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y > x) &= \mathbb{P}\left(\min(X_1, \dots, X_n) > \frac{x}{n^{1/k}}\right) = \mathbb{P}\left(X_i > \frac{x}{n^{1/k}}, \forall i = 1 \dots n\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X_i > \frac{x}{n^{1/k}}\right)^n = e^{-n\left(\frac{x}{n^{1/k}\lambda}\right)^k} = e^{-(\frac{x}{\lambda})^k}. \end{aligned}$$

La loi de Y est donc une loi de Weibull $\mathcal{W}(k, \lambda)$.