Correction du devoir en temps libre 1

Exercice n°1 :

▶ Ici, le résultat d'un lancer peut être vu comme un r-uplet $(i_1, \dots, i_r)$ où $i_j \in \{1, \dots, n\}$ est le numéro de la case où est tombée j^{eme} la balle. Un choix raisonnable pour l'ensemble des possibles est donc $\Omega = \{1, 2, ..., n\}^r$, de cardinal $|\Omega| = n^r$. L'ensemble Ω étant fini, on le munit de la tribu des parties. Le texte affirme que les balles se répartissent au hasard dans les cases, sans plus de précisions ; on choisit alors comme probabilité $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω.

▶ Considérons l'évènement $B = \{\text{aucune case n'est vide}\}$. On cherche à déterminer $\mathbb{P}(B)$. Tout d'abord, il est clair que si $r < n$ alors $\mathbb{P}(B) = 0$. Maintenant, si $r \geq n$, on remarque que $B^c = \bigcup_{i=1}^n B_i$, où $B_i = \{\text{la } i^{eme} \text{ case est vide}\}$ alors

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = 1 - \mathbb{P}(\cup_{i=1}^n B_i).$$

Pour calculer $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n B_i)$, on va appliquer la formule de Poincaré. On a

$$\mathbb{P}(B_i) = \frac{(n-1)^r}{n^r}, \quad \mathbb{P}(B_i \cap B_j) = \frac{(n-2)^r}{n^r}, \quad \mathbb{P}(B_i \cap B_j \cap B_k) = \frac{(n-3)^r}{n^r} \quad etc.$$

La formule de Poincaré donne alors :

$$\mathbb{P}(B^c) = C_n^1 \frac{(n-1)^r}{n^r} - C_n^2 \frac{(n-2)^r}{n^r} + ... + (-1)^{p+1} C_n^p \frac{(n-p)^r}{n^r} + ... + (-1)^n C_n^{n-1} \frac{(n-(n-1))^r}{n^r}.$$

Finalement, on trouve

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p C_n^p \left(\frac{n-p}{n} \right)^r$$

Exercice n°2 :

Soient X_1, X_2 des variables indépendantes, avec $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$.

▶ Soit $m \in \mathbb{N}$, alors

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = m) = \sum_{k=0}^m \mathbb{P}(X_1 + X_2 = m \,\cap\, X_1 = k) = \sum_{k=0}^m \mathbb{P}(X_1 = k \,\cap\, X_2 = m-k).$$

Comme X_1 et X_2 sont indépendantes

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = m) = \sum_{k=0}^m \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = m-k) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^m \frac{\lambda_1^k}{k!} \frac{\lambda_2^{m-k}}{(m-k)!},$$

$$i.e., \quad \mathbb{P}(X_1 + X_2 = m) = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{m!} \sum_{k=0}^m C_m^k \, \lambda_1^k \, \lambda_2^{m-k} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{m!} (\lambda_1 + \lambda_2)^m.$$

On a donc $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

▶ On fixe $m \in \mathbb{N}$, nous déterminons à présent la loi de X_1 sachant que $X_1+X_2=m$. On remarque tout d'abord que si $X_1+X_2=m$ on a forcément $X_1 \leq m$. Soit donc $k \leq m$, alors

$$\mathbb{P}(X_1 = k \mid X_1+X_2=m) = \frac{\mathbb{P}(X_1=k \,\cap\, X_1+X_2=m)}{\mathbb{P}(X_1+X_2=m)} = \frac{\mathbb{P}(X_1=k \,\cap\, X_2=m-k)}{\mathbb{P}(X_1+X_2=m)}.$$

Comme la variable X_1 est indépendante de X_2, on a alors

$$\mathbb{P}(X_1 = k \mid X_1+X_2=m) = \frac{\mathbb{P}(X_1=k) \times \mathbb{P}(X_2=m-k)}{\mathbb{P}(X_1+X_2=m)},$$

ou encore

$$\mathbb{P}(X_1 = k \mid X_1+X_2=m) = \frac{e^{-\lambda_1} \times \lambda_1^k/k! \times e^{-\lambda_2} \times \lambda_2^{(m-k)}/(m-k)!}{e^{\lambda_1+\lambda_2} \times (\lambda_1+\lambda_2)^m/m!},$$

$$i.e., \quad \mathbb{P}(X_1 = k \mid X_1+X_2=m) = C_m^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{m-k}.$$

On reconnaît une loi binomiale, précisément :

$$\mathcal{L}(X_1 \mid X_1+X_2=m) \sim \mathcal{B}\left(m, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$$

Exercice n˚3 : Marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$

▶ On fixe $m \geq 1$ et $k \in \mathbb{N}$. On désigne par u le nombre de montées, et d le nombre de descentes de la marche aléatoire pour aller de $(0,0)$ à $(2m,2k)$. Alors

$$\begin{cases} u+d=2m \\ u-d=2k \end{cases}$$

donc $u=m+k$ et $d=m-k$. Un chemin étant entièrement déterminé par ses montées, on a

$$\mathbb{P}(S_{2m}=2k) = C_{2m}^u \left(\frac{1}{2}\right)^u \left(\frac{1}{2}\right)^d = \frac{C_{2m}^{m+k}}{2^{2m}}.$$

▶ En particulier, pour $k=0$, on obtient

$$\mathbb{P}(S_{2m}=0) = \frac{C_{2m}^m}{2^{2m}} = \frac{1}{2^{2m}}\frac{(2m)!}{(m!)^2}.$$

▶ En utilisant la formule de Stirling il vient

$$\mathbb{P}(S_{2m}=0) \sim \frac{(2m)^{2m}e^{-2m}\sqrt{4\pi m}}{2^{2m}m^{2m}e^{-2m}2\pi m} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi m}} \quad \text{lorsque} \quad m \to +\infty.$$