Devoir en temps libre 3 (pour le 11.12.07)

Exercice 1 : (exercice 5.8)

Trois clients A,B,C arrivent au même temps $t = 0$ à la poste, où deux guichets sont ouverts, qu'occupent A et B tout de suite. C remplace le premier des deux qui a terminé. On admet que les temps de service X, Y, Z requis par ces 3 clients sont des v.a.r.i.i.d. de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

- Quelle est la loi du temps d'attente T de C ?

- Calculer la probabilité que C termine (et parte) le dernier.

- Calculer la loi du temps du dernier départ.

Exercice 2 : moments et fonction caratéristique

La fonction caractéristique ψ_X d'une variable aléatoire X est donnée par :

$$\psi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right], \quad \text{pour } \ t \in \mathbb{R}.$$

- Calculer la fonction caractéristique d'une variable de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, d'une variable de exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, d'une variable uniforme $\mathcal{U}_{[0,1]}$.

En dérivant sous le signe $\mathbb{E}$, il vient :

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\left[e^{itX}\right]_{|t=0} = i \times \mathbb{E}\left[X\right],$$

et plus généralement, pour $k \geq 1$:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]_{|t=0} = i^k \times \mathbb{E}\left[X^k\right].$$

- En utilisant les tranformées de Fourier, retrouver les moyennes et espérances des variables de Bernoulli, exponentielles, et uniformes.

Exercice 3 : sur les lois de Weibull

Soit X une variable aléatoire de loi de Weibull $\mathcal{W}(k, \lambda)$, où les paramètres k et λ sont strictement positifs. La loi de X est caractérisée par sa densité $\phi_{(k,\lambda)}$:

$$\phi_{(k,\lambda)}(x) = \left(\frac{k}{\lambda}\right)\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}, \quad \text{pour } \ x > 0.$$

- Pour $x > 0$, calculer $\mathbb{P}(X > x)$, en déduire la fonction de répartition de X.

- Calculer l'espérance de X. (On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} y^{a-1}e^{-y}dy = \Gamma(a+1)$).

- Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de même loi $\mathcal{W}(k, \lambda)$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = n^{1/k}\min(X_1, \ldots, X_n)$?