Devoir en temps libre 1

Exercice 1 : On dispose d'une boite contenant n cases. On jette r balles dans la boite, les balles se répartissant au hasard dans les n cases. Les entiers n et r sont supposés strictement positifs.

- Donner un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette expérience.
- Quelle est la probabilité qu'aucune case ne soit vide ?

Indication : Si B désigne l'évènement {aucune case n'est vide}, alors le complémentaire de B s'écrit $B^c = \cup_{i=1}^{n} B_i$ où B_i est l'évènement {la i^{eme} case est vide}. On pourra calculer les probabilités $\mathbb{P}(B_i)$, $\mathbb{P}(B_i \cap B_j)$, $\mathbb{P}(B_i \cap B_j \cap B_k)$, *etc.* et utiliser la formule du crible.

$\therefore$

Exercice 2 : Soient X_1, X_2 des variables indépendantes, de loi respectives $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$:

$$\mathbb{P}(X_i = k) = e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^k}{k!}, \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ i = 1, 2.$$

- Calculer la loi de $X_1 + X_2$, ainsi que son espérance et sa variance.
- On fixe $m \in \mathbb{N}$, calculer la loi de X_1 sachant que $X_1 + X_2 = m$.

Indication : Pour calculer la loi de $X_1 + X_2$, on pourra remarquer que pour $m \in \mathbb{N}$ fixé :

$$\{X_1 + X_2 = m\} = \bigcup_{k=0}^{m} \{X_1 + X_2 = m \text{ et } X_1 = k\}.$$

$\therefore$

Exercice 3 : On considère une suite $(X_i)_{i \geq 1}$ de variables indépendantes de loi de Bernoulli de paramétre 1/2 :

$$\mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = 1/2.$$

On pose $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, on définit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- On fixe $n \geq 1$, calculer la probabilité $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$.
- En utilisant la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ pour n grand, donner un équivalent de $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$

Indication : Si k est un entier, calculer la probabilité $\mathbb{P}(S_{2n} = 2k)$ revient à compter le nombre de chemins qui vont du point $(0, 0)$ au point $(2n, 2k)$. Un tel chemin est entièrement caractérisé par ses montées. Pour répondre à la première question, il suffit donc de donner le nombre de montées et de descentes d'un chemin qui va de $(0, 0)$ à $(2n, 0)$.

http ://www-irma.u-strasbg.fr/~angst angst@math.u-strasbg.fr