Correction du Contrôle continu 1

Questions de cours : Voir le cours, et l'apprendre !!!

Exercice 1 : (4 points)

a) Pour $i = 1, 2, 3$, l'évènement $\{X = i\}$ s'écrit comme l'union disjointe :

$$\{X = i\} = \{X = i \text{ et } Y = 1\} \cup \{X = i \text{ et } Y = 2\} \cup \{X = i \text{ et } Y = 3\}.$$

On a donc

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=1}^{3} \mathbb{P}(X = i \text{ et } Y = j) = \frac{3i + 6}{36}.$$

Par symétrie, on a de même $\mathbb{P}(Y = i) = \frac{3i+6}{36}$ pour $i = 1, 2, 3$.

b) Considérons les deux évènements $\{X = 1\}$ et $\{Y = 1\}$. On a

$$\mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) = \frac{2}{36} \neq \mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{16}.$$

Les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes.

Exercice 2 : (6 points)

a) Distribuer une main à un joueur de poker revient à choisir 5 cartes parmi les 52 du jeu. L'ensemble des résultats possibles correspondant à la ditribution de cinq mains successives est donc $\Omega := \{\text{choix de 5 cartes parmi 52}\}^5$. Cet ensemble est fini de cardinal $|\Omega| = (C_{52}^5)^5$, on le munit de la tribu de ses parties $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$. L'énoncé nous invite à choisir sur $(\Omega, \mathcal{F})$ la probabilité uniforme $\mathbb{P}$, toutes les mains étant équiprobables.

b) En choisissant la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$, on fait de facto l'hypothèse que les 5 mains distribuées sont indépendantes et ont même loi. Cette loi n'est autre que la probabilité uniforme $\mathbb{P}_1$ sur l'espace mesurable $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ qui modélise l'ensemble des résultats possibles pour une main : $\Omega_1 = \{\text{choix de 5 cartes parmi 52}\}$ et $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega_1)$. Pour chaque main, les probabilités d'avoir un full et un carré sont donc respectivement : $\mathbb{P}_1(\text{avoir un full})$ et $\mathbb{P}_1(\text{avoir un carré})$. La probabilité $\mathbb{P}_1$ étant la probabilité uniforme, on a

$$\mathbb{P}_1(\text{avoir un full}) = \frac{\text{nb de full}}{|\Omega_1|} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}_1(\text{avoir un carré}) = \frac{\text{nb de carré}}{|\Omega_1|}.$$

Un full est déterminé par la valeur du brelan ($C_{13}^1 = 13$ valeurs possibles), les couleurs des 3 cartes qui composent le brelan ($C_4^3 = 4$ combinaisons de couleurs possibles), la valeur de la paire ($C_{12}^1 = 12$ valeurs possibles) et les couleurs des 2 cartes qui la composent ($C_4^2 = 6$ combinaisons de couleurs possibles). Un full ne peut être ni un carré (puisqu'il n'y a pas de carte libre), ni une quinte flush (puisque les 3 cartes du brelan ont des couleurs différentes). Au total, on obtient nb de full $= C_{13}^1 C_4^3 C_{12}^1 C_4^2 = 13 \times 48 \times 6$.

Un carré est lui déterminé par la valeur du carré ($C_{13}^1 = 13$ valeurs possibles), et par la carte libre ($C_{52-4}^1 = C_{48}^1 = 48$ possibilités). On a donc nb de carré $= C_{13}^1 C_{48}^1 = 13 \times 48$. Finalement, on trouve

$$\mathbb{P}_1(\text{avoir un full}) = \frac{13 \times 48 \times 6}{C_{52}^5}, \qquad \mathbb{P}_1(\text{avoir un carré}) = \frac{13 \times 48}{C_{52}^5},$$

et bien entendu $\mathbb{P}_1(\text{avoir un full}) = 6 \times \mathbb{P}_1(\text{avoir un carré})$.

c) La probabilité d'avoir au moins carré dans les cinq mains est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{avoir au moins un carré}) &= 1 - \mathbb{P}(\text{ne pas avoir de carré du tout})\\ &= 1 - \mathbb{P}_1(\text{ne pas avoir de carré})^5 \;\; \text{par indépendance}\\ &= 1 - (1 - \mathbb{P}_1(\text{avoir de carré }))^5\\ &= 1 - \left(1 - \tfrac{13\times 48}{C_{52}^5}\right)^5 \approx 0.0012.\end{aligned}$$

Comme la probabilité d'avoir un full à la première donne est donnée par $\mathbb{P}_1(\text{avoir un full}) = 13 \times 48 \times 6/C_{52}^5 \approx 0.0014$, on conclut que $\mathbb{P}(\text{avoir au moins un carré}) < \mathbb{P}_1(\text{avoir un full})$.

Exercice 3 : (6 points)

On note B pour "beau temps" et M pour "mauvais temps" ou encore "il pleut". On désigne par X_n le temps qu'il fait le jour n. Par hypothèse $X_0 = M$ et

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = B \mid X_n = B) = 1/2, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = B \mid X_n = M) = 1/4.$$

a) D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = M) &= \mathbb{P}(X_2 = M \mid X_1 = B)\mathbb{P}(X_1 = B) + \mathbb{P}(X_2 = M \mid X_1 = M)\mathbb{P}(X_1 = M)\\ &= 1/2 \times \mathbb{P}(X_1 = B) + 3/4 \times \mathbb{P}(X_1 = M) = 1/2 \times 1/4 + 3/4 \times 3/4 = 11/16.\end{aligned}$$

b) En inversant le conditionnement, on trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = M \mid X_2 = M) &= \frac{\mathbb{P}(X_2 = M \mid X_1 = M)\mathbb{P}(X_1 = M)}{\mathbb{P}(X_2 = M)}\\ &= \frac{3/4 \times 3/4}{11/16} = 9/11.\end{aligned}$$

c) En appliquant la formule des probabilités totales comme plus haut, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = M) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = M \mid X_n = B)\mathbb{P}(X_n = B) + \mathbb{P}(X_{n+1} = M \mid X_n = M)\mathbb{P}(X_n = M)\\ p_{n+1} &= 1/2 \times (1 - p_n) + 3/4 \times p_n = 1/4 \times p_n + 1/2.\end{aligned}$$

La relation de récurrence s'écrit encore :

$$(p_{n+1} - 2/3) = 1/4 \times (p_n - 2/3), \quad \text{dont on déduit} \quad (p_n - 2/3) = 1/4^n \times (p_0 - 2/3).$$

On a donc $p_n = 1/3 \times 1/4^n + 2/3$ et la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ converge vers $2/3$ lorsque n tend vers l'infini.