Correction contrôle continu 2

Exercice 1 : (6 points)

$a)$ Par définition, l'espérance de X est donnée par

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \times \phi_X(x)dx = \int_{\mathbb{R}} x \times \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right) dx = \mu + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} y \times \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|y|}{b}\right) dy}_{=0 \text{ car intégrande impaire}} = \mu.$$

$b)$ Pour caractériser la loi de $|X|$, on peut calculer sa fonction de répartition. Soit $x > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X| > x) = \mathbb{P}(X < -x \text{ ou } X > x) = \mathbb{P}(X < -x) + \mathbb{P}(X > x),$$

soit

$$\mathbb{P}(|X| > x) = \int_{-\infty}^{-x} \phi_X(u)du + \int_x^{\infty} \phi_X(u)du = 2\int_x^{\infty} \phi_X(u)du = \frac{1}{b}\int_x^{\infty} e^{-u/b}du = e^{-x/b}.$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $1/b$.

$c)$ Nous allons calculer la densité ϕ_Y de la variable $Y := \lambda_1 X_1 - \lambda_2 X_2$. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Par définition de la densité ϕ_Y, on a

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \int_{u\in\mathbb{R}} f(u)\phi_Y(u)du.$$

D'autre part, en posant $\lambda_1 x - \lambda_2 y = u$ et $\lambda_1 x + \lambda_2 y = v$, *i.e.* $dudv = 2\lambda_1\lambda_2 dxdy$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(Y)] &= \mathbb{E}[f(\lambda_1 X_1 - \lambda_2 X_2)] = \int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} f(\lambda_1 x - \lambda_2 y)\lambda_1\lambda_2 \exp\left(-\lambda_1 x - \lambda_2 y\right) dxdy \\ &= \frac{1}{2} \times \int_{u\in\mathbb{R}}\int_{v\geq|u|} f(u)e^{-v}dudv = \frac{1}{2} \times \int_{u\in\mathbb{R}} f(u)e^{-|u|}du.\end{aligned}$$

En identifiant les intégrandes, on conclut que $\phi_Y(u) = 1/2 \times e^{-|u|}$, c'est à dire $Y \sim \mathcal{L}(0,1)$.

Exercice 2 : (6 points)

a) Calculons la fonction caractéristique ψ_X de X. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\psi_X(t) &= \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\phi_X(x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\frac{1}{2b}\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right)dx \\
&= \frac{1}{2b} \times \int_{\mathbb{R}} e^{it(y+\mu)}\exp\left(-\frac{|y|}{b}\right)dy \\
&= \frac{1}{2b} \times \int_{\mathbb{R}^+} e^{it(-y+\mu)}\exp\left(-\frac{y}{b}\right)dy + \frac{1}{2b} \times \int_{\mathbb{R}^+} e^{it(y+\mu)}\exp\left(-\frac{y}{b}\right)dy \\
&= \frac{e^{it\mu}}{2b} \times \left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{(-it-1/b)y}dy + \int_{\mathbb{R}^+} e^{(it-1/b)y}dy\right) \\
&= \frac{e^{it\mu}}{2b} \times \left(\frac{1}{it+1/b} - \frac{1}{it-1/b}\right) = \frac{e^{it\mu}}{1+t^2b^2}.
\end{aligned}$$

b) D'après la question précédente, si $X_n \sim \mathcal{L}(\mu_n, b_n)$ avec $b_n^2 = 1/2n$, sa fonction caractéristique est donnée par :

$$\psi_{X_n}(t) = \frac{e^{it\mu_n}}{1+t^2b_n^2} = \frac{e^{it\mu_n}}{1+\frac{t^2}{2n}}.$$

Comme les variables X_i sont indépendantes, la fonction caractéristique de la somme S_n est donnée par :

$$\psi_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n \psi_{X_i}(t) = e^{it\sum_{i=1}^n \mu_i} \times \left(\frac{1}{\frac{t^2}{2n}+1}\right)^n = \exp\left(it\sum_{i=1}^n \mu_i - n\log\left(1+\frac{t^2}{2n}\right)\right).$$

Sous les hypothèses de l'énoncé, on a $\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n \mu_i = 0$. D'autre part, en utilisant le développement limité en zéro : $\log(1+x) \sim x$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} n\log\left(1+\frac{t^2}{2n}\right) = \frac{t^2}{2}.$$

Finalement, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on obtient que lorsque n tend vers l'infini :

$$\psi_{S_n}(t) \longrightarrow \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right),$$

qui n'est autre que la fonction caractéristique d'une variable gaussienne centrée réduite, d'où le résultat.

Exercice 3 : (6 points)

On dispose de n observations $(x_1, \dots x_n)$ dont on suppose qu'elles sont les réalisations de n variables aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ indépendantes et de même loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, N\}$, où $N \geq 2$ est un entier inconnu. On souhaite estimer l'entier N à l'aide des observations $(x_1, \dots x_n)$.

a) Soit X une variable de loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, N\}$. L'espérance de X est donnée par :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{N} k \times \mathbb{P}(X = k) = \left(\sum_{k=1}^{N} k\right) \times \frac{1}{N} = \frac{N(N+1)}{2} \times \frac{1}{N} = \frac{N+1}{2}.$$

Par linéarité de l'espérance, on a donc $\mathbb{E}[2X - 1] = N$ et d'après la loi (faible) des grands nombres, lorsque n tend vers l'infini :

$$\widehat{X}_n := \frac{\sum_{i=1}^{n}(2X_i - 1)}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} N.$$

b) Par définition, l'estimateur $\widetilde{X}_n$ est consistant si $\widetilde{X}_n - N$ tend vers zéro en probabilité lorsque n tend vers l'infini, c'est à dire, si pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|\widetilde{X}_n - N| > \varepsilon) = \mathbb{P}(N - \widetilde{X}_n > \varepsilon)$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Comme $N - \widetilde{X}_n$ est ici à valeurs entières, cela revient à dire que $\mathbb{P}(N - \widetilde{X}_n \geq 1)$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Calculons cette probabilité :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N - \widetilde{X}_n \geq 1) &= \mathbb{P}(\widetilde{X}_n \leq N - 1) = \mathbb{P}(X_i \leq N - 1,\ \forall\, i = 1, \dots, n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq N - 1) = \mathbb{P}(X_1 \leq N - 1)^n = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n. \end{aligned}$$

Comme $(N - 1)/N < 1$, cette probabilité tend bien vers zéro lorsque n tend vers l'infini, d'où le résultat.