Contrôle continu 2

Questions de cours : (4 points)

a) Donner la définition de l'indépendance de n évènements $A_1, \dots, A_n$.

b) Énoncer le théorème limite central.

Exercice 1 : (6 points)

On dit qu'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ suit une loi de Laplace de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $b > 0$, et on note $X \sim \mathcal{L}(\mu, b)$, si X admet la densité suivante sur $\mathbb{R}$:

$$\phi_X(x) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right).$$

a) Donner l'allure de la fonction $x \mapsto \phi_X(x)$ lorsque $\mu = 2, b = 1$. Que vaut l'espérance de X ?

b) Soit $X \sim \mathcal{L}(0, b)$, quelle est la loi de $|X|$?

c) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de paramètre λ_1 et λ_2 respectivement. Déterminer la loi de $\lambda_1 X_1 - \lambda_2 X_2$.

Exercice 2 : (6 points)

Soit X une variable aléatoire de loi de Laplace $\mathcal{L}(\mu, b)$ (voir premier exercice).

a) Calculer la fonction caractéristique de X.

b) Soient X_n une suite de variables indépendantes telles que $X_n \sim \mathcal{L}(\mu_n, b_n)$. On suppose que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\mu_n| < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n = 0, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

En utilisant la première question, montrer que la suite $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ converge vers une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

Exercice 3 : (6 points)

On dispose de n observations $(x_1, \dots x_n)$ dont on suppose qu'elles sont les réalisations de n variables aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ indépendantes et de même loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, N\}$, où $N \geq 2$ est un entier inconnu. On souhaite estimer l'entier N à l'aide des observations $(x_1, \dots x_n)$.

a) Soit X une variable de loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, N\}$. Quelle est sa moyenne ? En déduire, à l'aide de la loi des grands nombres, un estimateur consistant $\widehat{X}_n$ de l'entier N.

b) On pose $\widetilde{X}_n = \max\{X_i,\ i = 1, \dots, n\}$. Montrer que $\widetilde{X}_n$ est aussi un estimateur consistant de N. Indice : cela revient à montrer que $\mathbb{P}(|N - \widetilde{X}_n| \geq 1)$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.