

## CONTRÔLE CONTINU 1

### Questions de cours : (4 points)

- Donner la définition de l'indépendance de  $n$  évènements  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .
- Énoncer l'inégalité de Markov (encore appelée inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

### Exercice 1 : (4 points)

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires à valeurs dans  $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$  tel que

$$\mathbb{P}(X = i \text{ et } Y = j) = \frac{i + j}{36}.$$

- Déterminer la loi de  $X$  et celle de  $Y$ .
- Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

### Exercice 2 : (6 points)

Une main de poker est la donnée de 5 cartes dans un jeu de  $52 = 13 \times 4$  cartes. Un carré est une main qui contient quatre cartes de même valeur. Un full est une main composée de 3 cartes de même valeur + 2 cartes de même valeur. On mélange les cartes avant de les distribuer aux joueurs, de sorte que l'on pourra supposer qu'à chaque donne toutes les mains sont équiprobables.

- Donner un espace de probabilité permettant de modéliser les mains distribuées à un joueur au cours de cinq donnes successives.
- Montrer qu'à chaque donne, la probabilité d'avoir un full est six fois plus grande que la probabilité d'avoir un carré. (Justifiez vos calculs)
- Est-il plus probable d'avoir un full dans la première main, ou d'avoir au moins un carré dans les cinq mains ?

### Exercice 3 : (6 points)

On modélise le temps qu'il fait à Strasbourg de la façon suivante : s'il fait beau le  $n$ -ième jour, alors la probabilité qu'il fasse beau le  $(n + 1)$ -ième jour est  $1/2$  ; s'il pleut le  $n$ -ième jour, alors la probabilité qu'il fasse beau le  $(n + 1)$ -ième jour est  $1/4$ . On démarre au jour 0, où il pleut.

- Calculer la probabilité qu'il pleuve le jour 2.
- Sachant qu'il pleut le jour 2, calculer la probabilité qu'il ait plu le jour 1.
- On note  $p_n$  la probabilité qu'il pleuve le jour  $n$ . Trouver une relation de récurrence entre  $p_{n+1}$  et  $p_n$ , et déterminer la valeur de  $p_n$ . La suite  $p_n$  converge-t-elle ?