

## CORRECTION CC 1 deuxième groupe

### Exercice 1 : (5 points)

Pour le lancer des deux dés, l'ensemble des résultats possibles est  $\{1, \dots, 6\}^2$ . Pour le lancer des deux pièces, l'ensemble des résultats possibles est  $\{pile, face\}^2$ . Les deux lancers sont indépendants, l'ensemble des résultats possibles pour les deux lancers est donc :

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^2 \times \{pile, face\}^2.$$

Comme  $\Omega$  est un ensemble fini,  $|\Omega| = 6^2 \times 2^2$ , on choisit la tribu des parties  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Le texte précise que les dés et les pièces sont normaux, on choisit donc pour  $\mathbb{P}$  la probabilité uniforme sur  $\Omega$ . La somme de deux dés vaut 3 si et seulement si les dés valent 2 et 1. Pour cela, il y a deux possibilités (1, 2) et (2, 1), d'où une probabilité de  $2/36$ . Le score est multiplié par deux si et seulement si une pièce exactement tombe sur pile, cela se produit avec une probabilité  $1/2$ . Les deux événements sont indépendants, on a donc

$$\mathbb{P}(\text{somme des dés} = 3 \text{ et les deux pièces donnent face}) = \frac{2}{36} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{36}.$$

### Exercice 2 : (5 points)

On note  $V$  pour vacciné,  $NV$  pour non vacciné,  $M$  pour malade,  $S$  pour sain. D'après les hypothèses,

$$\mathbb{P}(V) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(V | M) = \frac{1}{5}, \quad \mathbb{P}(NV | M) = \frac{4}{5}, \quad \mathbb{P}(M | V) = \frac{1}{10}.$$

On a

$$\mathbb{P}(M | NV) = \frac{\mathbb{P}(NV \cap M)}{\mathbb{P}(NV)} = \frac{\mathbb{P}(NV | M)\mathbb{P}(M)}{1 - \mathbb{P}(V)} = \frac{6}{5} \times \mathbb{P}(M).$$

Or

$$\mathbb{P}(M | V) = \frac{\mathbb{P}(V \cap M)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{\mathbb{P}(V \cap M)}{1/3} = \frac{1}{10} \quad \text{donc} \quad \mathbb{P}(V \cap M) = \frac{1}{30},$$

$$\mathbb{P}(V | M) = \frac{\mathbb{P}(V \cap M)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{1}{5} \quad \text{donc} \quad \mathbb{P}(M) = \frac{1}{6}.$$

Finalement

$$\mathbb{P}(M | NV) = \frac{6}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{5}.$$

### Exercice 3 : (5 points)

Comme l'espérance est linéaire, on a  $\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]$ . Par définition, on a

$$\mathbb{E}[X_i] = (-1) \times \mathbb{P}(X_i = -1) + (1) \times \mathbb{P}(X_i = 1) + (2) \times \mathbb{P}(X_i = 2) + (0) \times \mathbb{P}(X_i = 0),$$

d'où

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{6i}(-1 + 1 + 8) = \frac{4}{3i}, \quad \text{puis} \quad \mathbb{E}[S_n] = \frac{4}{3} \times \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

D'autre part, on a  $\mathbb{E}[|S_n|] \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i|]$  et comme  $\mathbb{E}[|X_i|] = \frac{1}{6i} (1 + 1 + 8) = \frac{5}{3i}$ , on déduit que

$$\mathbb{E}[|S_n|] \leq \frac{5}{3} \times \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \frac{10}{3} \log(n).$$

D'après l'inégalité de Markov, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{n^2 \log(n)} > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}[|S_n|]}{\varepsilon n^2 \log(n)} \leq \frac{10}{3\varepsilon} \times \frac{1}{n^2}.$$

La série de terme général  $1/n^2$  est convergente, d'après le lemme de Borel-Cantelli, on en déduit

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{|S_n|}{n^2 \log(n)} > \varepsilon \right\}\right) = 0.$$