Correction CC 1 premier groupe

Exercice 1 : (5 points)

Pour le lancer des deux dés, l'ensemble des résultats possibles est $\{1,\ldots,6\}^2$. Pour le lancer des deux pièces, l'ensemble des résultats possibles est $\{pile, face\}^2$. Les deux lancers sont indépendants, l'ensemble des résultats possibles pour les deux lancers est donc :

$$\Omega = \{1,\ldots,6\}^2 \times \{pile,\ face\}^2.$$

Comme Ω est un ensemble fini, $|\Omega| = 6^2 \times 2^2$, on choisit la tribu des parties $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Le texte précise que les dés et les pièces sont normaux, on choisit donc pour $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω. La somme de deux dés vaut 11 si et seulement si les dés valent 5 et 6. Pour cela, il y deux possibiltés $(5,6)$ et $(6,5)$, d'où une probabilité de $2/36$. Le score est multiplié par deux si et seulement si les deux pièces tombent sur face, cela se produit avec une probabilité $1/4$. Les deux évènements sont indépendants, on a donc

$$\mathbb{P}(\text{somme des dés} = 11 \text{ et les deux pièces donnent face}) = \frac{2}{36} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{72}.$$

Exercice 2 : (5 points)

On note V pour vacciné, NV pour non vacciné, M pour malade, S pour sain. D'après les hypothèses,

$$\mathbb{P}(V) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(V \mid M) = \frac{1}{5}, \quad \mathbb{P}(NV \mid M) = \frac{4}{5}, \quad \mathbb{P}(M \mid V) = \frac{1}{12}.$$

On a

$$\mathbb{P}(M \mid NV) = \frac{\mathbb{P}(NV \cap M)}{\mathbb{P}(NV)} = \frac{\mathbb{P}(NV \mid M)\mathbb{P}(M)}{1 - \mathbb{P}(V)} = \frac{6}{5} \times \mathbb{P}(M).$$

Or

$$\mathbb{P}(M \mid V) = \frac{\mathbb{P}(V \cap M)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{\mathbb{P}(V \cap M)}{1/3} = \frac{1}{12} \qquad \text{donc} \quad \mathbb{P}(V \cap M) = \frac{1}{36},$$

$$\mathbb{P}(V \mid M) = \frac{\mathbb{P}(V \cap M)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{1}{5} \qquad \text{donc} \quad \mathbb{P}(M) = \frac{5}{36}.$$

Finalement

$$\mathbb{P}(M \mid NV) = \frac{6}{5} \times \frac{5}{36} = \frac{1}{6}.$$

Exercice 3 : (5 points)

Comme l'espérance est linéaire, on a $\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]$. Par définition, on a

$$\mathbb{E}[X_i] = (-1) \times \mathbb{P}(X_i = -1) + (1) \times \mathbb{P}(X_i = 1) + (2) \times \mathbb{P}(X_i = 2) + (0) \times \mathbb{P}(X_i = 0),$$

d'où

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{3i}\,(-1+1+2) = \frac{2}{3i}, \quad \text{puis} \quad \mathbb{E}[S_n] = \frac{2}{3} \times \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

D'autre part, on a $\mathbb{E}\left[|S_n|\right] \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i|]$ et comme $\mathbb{E}[|X_i|] = \frac{1}{3i}\left(1+1+2\right) = \frac{4}{3i}$, on déduit que

$$\mathbb{E}[|S_n|] \leq \frac{4}{3} \times \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \frac{8}{3}\log(n).$$

D'après l'inégalité de Markov, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{n^2\log(n)} > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}[|S_n|]}{\varepsilon n^2 \log(n)} \leq \frac{8}{3\varepsilon} \times \frac{1}{n^2}.$$

La série de terme général $1/n^2$ est convergente, d'après le lemme de Borel-Cantelli, on en déduit

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty}\left\{\frac{|S_n|}{n^2\log(n)} > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$