

CONTRÔLE CONTINU 2 (18.12.07)

Exercice 1 : (6 points)

- Par définition, pour tout $x, y > 0$, on a

$$\mathbb{P}(X > x + y | X > x) = \frac{\mathbb{P}(X > x + y)}{\mathbb{P}(X > x)} = \left(\frac{x}{x + y} \right)^k.$$

Lorsque y est fixé, et x tend vers l'infini, on a bien $x/(x + y) \rightarrow 1$.

- On donne deux méthodes de calcul pour l'espérance. Tout d'abord, on a vu (ex 3.4) que

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > x) dx.$$

On a donc

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{x_0} 1 dx + \int_{x_0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > x) dx = x_0 + \int_{x_0}^{+\infty} \left(\frac{x_0}{x} \right)^k dx = x_0 + \frac{x_0}{k-1} = \frac{kx_0}{k-1}.$$

Une autre méthode consiste à utiliser la densité de X . On la calcule en dérivant la fonction de répartition : on trouve

$$\phi_X(x) = kx_0^k x^{-(k+1)}, \text{ pour } x \geq x_0, \text{ et zéro sinon.}$$

On a alors

$$\mathbb{E}[X] = \int_{x_0}^{+\infty} x \phi_X(x) dx = \int_{x_0}^{+\infty} x \times kx_0^k x^{-(k+1)} dx = \frac{kx_0}{k-1}.$$

Pour la variance, si $k > 2$, on trouve :

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{x_0}^{+\infty} x^2 \phi_X(x) dx = \int_{x_0}^{+\infty} x^2 \times kx_0^k x^{-(k+1)} dx = \frac{kx_0^2}{k-2},$$

d'où

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{kx_0^2}{(k-2)(k-1)^2}.$$

Dans le cas où $1 < k < 2$, la variable X n'admet pas de moment d'ordre deux. Enfin, si les X_i sont indépendantes, de mêmes paramètres (x_0, k) , alors pour $x \geq x_0$:

$$\mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) > x) = \mathbb{P}(X_1 > x, \dots, X_n > x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i > x) = \left(\frac{x_0}{x} \right)^{nk}.$$

La variable $\min(X_1, \dots, X_n)$ suit donc une loi de Pareto(x_0, nk).

Exercice 2 : (6 points)

- Par définition, pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{itk} e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda(e^{it} - 1)).$$

- Si les variables sont indépendantes, la transformée de Fourier de la somme est le produit des transformées de Fourier. On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E} [e^{itS_n}] = \prod_{i=1}^n \exp (\lambda(e^{it} - 1)) = \exp (n\lambda(e^{it} - 1)).$$

En faisant, $t \rightarrow t/n$, on en déduit que

$$\mathbb{E} [e^{itS_n/n}] = \exp (n\lambda(e^{it/n} - 1)),$$

puis

$$\mathbb{E} [e^{it(\frac{S_n}{n} - \lambda)}] = \exp \left(n\lambda \left(e^{it/n} - 1 - i\frac{t}{n} \right) \right).$$

En faisant cette fois, $t \rightarrow it$, puis $t \rightarrow t/\sqrt{n}$, on obtient :

$$\mathbb{E} [e^{-t(\frac{S_n}{n} - \lambda)}] = \exp \left(n\lambda \left(e^{-t/n} - 1 + \frac{t}{n} \right) \right),$$

puis

$$\mathbb{E} [e^{-t\sqrt{n}(\frac{S_n}{n} - \lambda)}] = \exp \left(n\lambda \left(e^{-t/\sqrt{n}} - 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right).$$

En faisant le développement limité de la fonction exponentielle en zéro, (t fixé, $n \rightarrow +\infty$), on a

$$e^{-t/\sqrt{n}} = 1 - \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + o(1/n),$$

d'où

$$\mathbb{E} [e^{-t\sqrt{n}(\frac{S_n}{n} - \lambda)}] = \exp \left(\lambda \frac{t^2}{2} + o(1) \right).$$

On a donc bien :

$$\mathbb{E} [e^{-t\sqrt{n}(\frac{S_n}{n} - \lambda)}] \rightarrow e^{\lambda t^2/2}.$$

On reconnaît dans le membre de droite, la transformée de Laplace (Fourier en it) d'une variable gaussienne centrée de variance λ . Lorsque n tend vers l'infini, on a donc

$$\sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - \lambda \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \lambda).$$

Exercice 3 : (4 points)

- On obtient la densité ϕ_X de la variable X en dérivant la fonction de répartition. On trouve :

$$\phi_X(x) = kx_0^k x^{-(k+1)}, \text{ pour } x \geq x_0, \text{ et zéro sinon.}$$

- Désignons par ϕ_Y la densité de la variable Y . Soit f une fonction régulière bornée, par définition, on a

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \int_{x_0}^{+\infty} f(y)\phi_Y(y)dy.$$

D'autre part, on a

$$\mathbb{E}[f(X^2)] = \int_{x_0}^{+\infty} f(x^2)\phi_X(x)dx = \int_{x_0}^{+\infty} f(x^2) \times kx_0^k x^{-(k+1)}dx.$$

En faisant le changement de variable $x^2 = y$, *i.e.*, $dx = 1/(2\sqrt{y})dy$, on obtient

$$\mathbb{E}[f(X^2)] = \int_{x_0^2}^{+\infty} f(y) \times \frac{k}{2} x_0^k y^{-(k/2+1)} dy.$$

On reconnaît la densité d'une loi de Pareto($x_0^2, k/2$). Le résultat se retrouve immédiatement en utilisant les fonctions de répartition, pour $x \geq x_0$:

$$\mathbb{P}(X^2 > x) = \mathbb{P}(X > \sqrt{x}) = \left(\frac{x_0}{\sqrt{x}} \right)^k = \left(\frac{x_0^2}{x} \right)^{k/2}.$$