Contrôle continu 1 (20.11.07)

Questions de cours : (5 points)

- Enoncer le lemme de Borel-Cantelli (il y a deux assertions).

- Enoncer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire réelle.

Exercice 1 : (5 points)

On considère un jeu de plateau dont les règles sont les suivantes. Pour savoir de combien de cases chaque joueur avance, il lance deux dés dont il fait la somme. Il lance ensuite deux pièces avant de répondre à une question qui peut lui rapporter, selon qu'il y répond justement ou non, un score de 10 points ou -10 points. Ce score est alors multiplié par un coefficient qui dépend du résultat du lancer des pièces. Si les deux pièces sont tombées sur face, le score est multiplié par zéro, s'il a fait une fois pile (exactement), le score est multiplié par 2, si les deux pièces sont tombées sur pile, le score est multiplié par 3. Dés et pièces sont supposés normaux.

- Donner un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ permettant de modéliser à la fois le lancer des deux dés et le lancer des deux pièces.

- Quelle est la probabilité d'avancer de 3 cases et que le score soit multiplié par 2 ?

Exercice 2 : (5 points)

Le tiers d'une population est vacciné contre la grippe. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour 4 non-vaccinés, et qu'il y a un malade sur 10 parmi les vaccinés.

- Traduire l'énoncé en terme de probabilités.

- Quelle est la probabilité qu'un non-vacciné tombe malade ?

Exercice 3 : (5 points)

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour $i \geq 1$:

$$\mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{6i}, \quad \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{6i} \quad \mathbb{P}(X_i = 2) = \frac{2}{3i} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - \frac{1}{i}.$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et on rappelle que :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq 2\log(n), \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} 1/n^2 < +\infty.$$

- Calculer $\mathbb{E}[S_n]$ et donner une majoration simple de $\mathbb{E}\left[|S_n|\right]$.

- En utilisant l'inégalité de Markov et le lemme de Borel-Cantelli, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty}\left\{\frac{|S_n|}{n^2\log(n)} > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$