Probabilités-Statistiques — L3 S5 Physique

Cours de Jacques Franchi — Année 2007-2008

Contrôle continu 2 (18.12.07)

Questions de cours : (4 points)

- Enoncer la loi forte des grands nombres et le théorème limite central.
- Quelles sont la densité et la transformée de Fourier d'une variable gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$?

Exercice 1 : (6 points)

On considère une variable aléatoire X de loi de Pareto(x_0, k), où les paramètres (x_0, k) vérifient $x_0 > 0$ et $k > 2$. La loi de X est caractérisée par :

$$\mathbb{P}(X > x) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^k, \quad \text{pour } x \geq x_0, \quad \text{et } \mathbb{P}(X > x) = 1, \quad \text{si } x < x_0.$$

- Montrer que la loi de X possède la propriété de longue traine, *i.e.*, pour tout $y > 0$:

$$\lim_{x \to +\infty} \mathbb{P}(X > x + y | X > x) = 1.$$

- Calculer l'espérance et la variance de la variable X. Que se passe-t-il si on ne suppose plus $k > 2$, mais $1 < k < 2$?
- Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables de Pareto, indépendantes, de mêmes paramètres (x_0, k). Quelle est la loi de la variable $\min(X_1, \ldots, X_n)$?

Exercice 2 : (6 points)

Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, *i.e.*,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

- Calculer la fonction caractéristique de X.
- En déduire la fonction caractéristique de $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ où les X_i sont des variables aléatoires de Poisson, indépendantes, et de même paramètre λ.
- Montrer qu'à t fixé, lorsque n tend vers l'infini, on a $\mathbb{E}\left[e^{-t\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - \lambda\right)}\right] \to e^{\lambda t^2/2}$. En déduire la loi limite, lorsque n tend vers l'infini, de la suite $\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - \lambda\right)$.

Exercice 3 : (4 points)

Soit X une variable aléatoire de Pareto(x_0, k) comme dans l'exercice 2.
- Calculer la densité de ϕ_X de la variable X.
- En utilisant la caractérisation à l'aide des densités, déterminer la loi de la variable $Y = X^2$.
- Retrouver le résultat en utilisant la caractérisation à l'aide des fonctions de répartition.