Correction du Contrôle continu n°1

Exercice n°1 :

On lance n fois cinq dés. Les dés sont supposés non truqués et les lancers indépendants. Lors d'un lancer de cinq dés, on dit que l'on fait un *full* si un numéro sort trois fois exactement et un autre numéro apparaît deux fois exactement ; par exemple $\{5, 2, 5, 5, 2\}$ est un full.

a) Au cours d'un lancer de cinq dés, quelle est la probabilité de faire un full ?

Cette question valait 3 points. Si on lance une fois 5 dés non truqués, l'espace des épreuves est $\Omega = \{1, \dots, 6\}^5$ que l'on muni de la tribu des parties et de la mesure uniforme. Dans ce cadre, si A désigne l'évènement $\{\text{faire un full}\}$:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Or $|\Omega| = 6^5$ et $|A| = 6 \times 5 \times C_5^2$. En effet, lorsque l'on fait un full, on a 6 choix pour le numéro qui apparaît 3 fois exactement, 5 choix pour celui qui apparaît deux fois exactement. Il reste alors à choisir l'ordre dans lequel les numéros apparaissent, soit C_5^2 possibilités. On trouve donc $\mathbb{P}(A) = 25/648$.

b) Quelle est la probabilité de faire au moins un full au cours de n lancers de cinq dés ?

Cette question valait 3 points. Si on lance n fois 5 dés non truqués, l'espace des épreuves est cette fois $\Omega = \left(\{1, \dots, 6\}^5\right)^n$. Si B_n désigne l'évènement $\{\text{faire au moins un full au cours des } n \text{ lancers}\}$:

$$\mathbb{P}(B_n) = 1 - P(B_n^c) = 1 - \mathbb{P}(A^c)^n = 1 - (1 - \mathbb{P}(A))^n = 1 - \left(\frac{623}{648}\right)^n.$$

c) Combien de fois faut-il lancer les cinq dés pour que cette probabilité dépasse 0.99 ?

Cette question valait 2 points. D'après la question précédente

$$\mathbb{P}(B_n) > 0.99 \Longleftrightarrow 1 - \left(\frac{623}{648}\right)^n > 0.99 \Longleftrightarrow n > \log(0.01)/\log\left(\frac{623}{648}\right) \sim 117.05,$$

$$i.e. \quad \mathbb{P}(B_n) > 0.99 \Longleftrightarrow n \geq 118.$$

Exercice n°2 :

A l'assemblée nationale, deux députés sur trois appartiennent à la majorité. Au cours d'un vote pour un projet de loi, parmi les "pour", il y a un député de la majorité pour trois députés de l'opposition. Parmi les députés de la majorité, un sur deux est "pour".

a) Traduisez l'énoncé en terme de probabilités conditionnelles.

Cette question valait 3 points. Si on désigne par M le fait d'appartenir à la majorité, $O = M^c$ le fait d'appartenir à l'opposition, P le fait d'être pour le projet de loi, alors l'énoncé se traduit comme suit :

$$\mathbb{P}(M) = 2/3, \quad \mathbb{P}(M \mid P) = 1/4, \quad \mathbb{P}(P \mid M) = 1/2.$$

$b)$ Quelle est la probabilité pour qu'un député de l'opposition soit "pour" ?

Cette question valait 4 points. Par définition de la probabilité conditionnelle, puis en inversant le conditionnement au numérateur, on a :

$$\mathbb{P}(P \mid O) = \frac{\mathbb{P}(P \cap O)}{\mathbb{P}(O)} = \frac{\mathbb{P}(O \mid P) \times \mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(O)}.$$

On connaît $P(O \mid P)$ et $P(O)$, il reste à déterminer $\mathbb{P}(P)$ par la formule de probabilité totale :

$$\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(P \mid O)\mathbb{P}(O) + \mathbb{P}(P \mid M)\mathbb{P}(M),$$

d'où

$$\mathbb{P}(P \mid O) \times (1 - \mathbb{P}(O \mid P)) = \frac{\mathbb{P}(O \mid P)}{\mathbb{P}(O)} \times \mathbb{P}(P \mid M)\mathbb{P}(M) \quad (\star)$$

ou encore

$$\mathbb{P}(P \mid O) \times \mathbb{P}(M \mid P) = \frac{\mathbb{P}(O \mid P)}{\mathbb{P}(O)} \times \mathbb{P}(P \mid M)\mathbb{P}(M).$$

La formule ci dessus détermine $\mathbb{P}(O \mid P)$ en fonction des données. Lorsque l'on fait l'application numérique, on trouve une valeur abérante $\mathbb{P}(O \mid P) = 3$! ! ! J'ai choisi les données de telle sorte qu'on trouve une probabilité plus grande que 1. Il s'agissait simplement de voir comment vous réagissiez face à un tel problème. Aucun d'entre vous n'a osé écrire $\mathbb{P} = 3$ ce qui une très rassurant. Bien conscient que cela vous avait destabilisé, j'ai noté très large cette question : j'ai ainsi accordé 1 point à ceux qui ont esquissé un début de calcul (faux ou correct), 2 points à ceux qui ont écrit une formule de Bayes ou de probabilité totale correcte, de 3 à 4 points à ceux qui sont allés jusqu'à $(\star)$ ou y était presque et ont vu qu'il y avait un problème.

Exercice n°3 :

Un étudiant a cours à l'Esplanade jusqu'à 17h00. Il a rendez-vous place Kléber à 17h30. Pour se rendre sur le lieu de rendez-vous, il a le choix entre faire le chemin à pied ou prendre le tram.
Pour le trajet à pied, il part dès 17h05 et son temps de trajet suit une loi gausienne de moyenne 20 et variance de 4. Le premier tram est à 17h15 et la durée du trajet en tram suit une loi gaussienne de moyenne 10 et de variance 9.
Quel moyen de transport doit-il choisir pour avoir le plus de chance d'arriver à l'heure ?

Cette question valait 5 points. Si on désigne par X (resp. Y) le temps de parcours à pied (resp. en tram) , l'énoncé nous dit que

$$X \sim \mathcal{N}(20,\ 4), \quad Y \sim \mathcal{N}(10,\ 9).$$

Les probabilités d'arriver à l'heure en partant à pied ou en tram sont alors

$$\mathbb{P}(X \leq 25) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y \leq 15).$$

Or

$$\left\{ \begin{array}{l} P(X \leq 25) = \mathbb{P}\left(\dfrac{X-20}{2} \leq \dfrac{25-20}{2}\right) = \mathbb{P}(U \leq 5/2) \\ \\ P(Y \leq 15) = \mathbb{P}\left(\dfrac{Y-10}{3} \leq \dfrac{15-10}{3}\right) = \mathbb{P}(U \leq 5/3) \end{array} \right. \quad \text{où } U \sim \mathcal{N}(0,\ 1).$$

On a clairement $\mathbb{P}(U \leq 5/2) \geq \mathbb{P}(U \leq 5/3)$ donc $P(X \leq 25) \geq P(Y \leq 15)$. Pour arriver à l'heure, il vaut mieux circuler à pied.