CONTRÔLE CONTINU N°2 (19.12.06)

Exercice n°1 :

On considère une variable X de loi gaussienne centrée réduite, i.e. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

i) Quelle est la densité de la variable X^2 ?

Soient U et V deux variables indépendantes de loi $\Gamma(1/2,1/2)$, c'est à dire deux variables positives dont la densité est donnée sur $\mathbb{R}^+$ par $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-1/2} e^{-x/2}$.

ii) Quelle est la densité de $U + V$?

Indice : on pourra remarquer que pour tout $x > 0$:

$$\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{y(x-y)}} \equiv \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} = \pi.$$

Considérons à présent X_1, X_2, Y_1 et Y_2 des variables gaussiennes centrées réduites, indépendantes, et posons $R_1^2 := X_1^2 + Y_1^2$ et $R_2^2 := X_2^2 + Y_2^2$.

iii) Dédurre de ce qui précède la loi de R_1 .

iv) Quelle est la loi de $\min(R_1^2, R_2^2)$?

Exercice n°2 :

A une variable aléatoire X à valeurs réelles, on associe sa fonction caractéristique $\psi_X(t) := \mathbb{E}[e^{itX}]$. On rappelle que si X admet des moments d'ordre un et deux, ils sont donnés par :

$$\mathbb{E}[X] = -i \psi'_X(0), \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[X^2] = -\psi''_X(0).$$

i) Calculer la fonction ψ_X lorsque $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, et $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

ii) En déduire l'espérance et la variance d'une loi binomiale et d'une loi exponentielle.

iii) Si $(X_i)_{i=1\dots n}$ sont i.i.d de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, quelle est la fonction caractéristique de $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$?

Exercice n°3 :

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

i) Lorsque n tend vers l'infini, que peut-on dire de S_n/n où $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$?

ii) Même question avec la suite $\sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{\lambda} \right)$?