Épreuve d'Analyse et Probabilités, 2002

Corrigé

PARTIE I : CHANGEMENTS D'ECHELLE

Ia.

Si l'on pose

$$e_{T,k}:\ x \in [0,T] \mapsto \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\frac{-2i\pi kx}{T}}\,,$$

on sait que la famille $(e_{T,k})$ constitue une base hilbertienne de $L^2([0,T])$: c'est en effet un système orthonormé de manière évidente et il est total puisque les polynômes trigonométriques de fréquences multiples entiers de $2\pi/T$ forment, d'après le théorème de Stone-Weierstrass ou le théorème de Féjer, une partie dense dans l'espace des fonctions continues T-périodiques, équipé de la norme sup sur $[0,T]$. On a donc, si f est une fonction périodique de carré intégrable sur $[0,T]$

$$f = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ L^2[0,T]}} \langle f, e_{T,k}\rangle e_{T,k}\,,$$

ce qui signifie que f est la limite dans $L^2([0,T])$ de la suite de ses projections $P_N[f]$ sur les sous-espaces $\mathrm{Vect}(e_{T,-N},....,e_{T,N})$; on a donc bien

$$f = \lim_{\substack{N\to+\infty \\ L^2([0,T])}} \sum_{k=-N}^{N} \langle f, e_{T,k}\rangle\, e_{T,k} = \lim_{\substack{N\to+\infty \\ L^2([0,T])}} \sum_{k=-N}^{N} f_k e^{-2ik\pi(\cdot)}\,.$$

De plus

$$\int_0^T |f(x)|^2 dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, e_{T,k}\rangle|^2 = T\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f_k|^2$$

d'après l'égalité de Bessel.

Ib.

Si f est dans $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ et si $g(x) := f(ax)$ presque partout, on a

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(ax)e^{-i\xi x}dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x/a}\frac{dx}{a} = \frac{1}{a}\widehat{f}(\xi/a)$$

(ce en utilisant le changement de variables $x \mapsto ax$). Comme les applications

$$f \mapsto f(a(\cdot)) \quad , \quad f \mapsto f((\cdot)/a)$$

sont continues (et inverses l'une de l'autre) de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même, la formule établie pour la transformée de Fourier de g reste valide par prolongement de la transformée de Fourier de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ à $L^2(\mathbb{R})$ lorsque f est cette fois dans $L^2(\mathbb{R})$.

PARTIE II : Formule sommatoire de Poisson

IIa.

On a, par définition de la transformée de Fourier,

$$\widehat{h}(\xi) = \int_{-M}^{M} h(x)e^{-i\xi x}dx\,, \quad \xi \in \mathbb{R}\,.$$

L'intégrale figurant au second membre de cette expression converge lorsque ξ est un nombre complexe (puisque h est intégrable et que la fonction $x \mapsto e^{-i\xi x}$ est bornée en module sur $[-M, M]$). De plus, comme

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{x\in[-M,M]} \Big| e^{-i\xi x} - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-i\xi x)^k}{k!} \Big| = 0\,,$$

on déduit du résultat classique concernant l'interversion série-intégrale que, pour tout ξ dans $\mathbb{C}$,

$$\int_{-M}^{M} h(x)e^{-i\xi x}dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \Big(\int_{-M}^{M} h(x)x^k dx \Big)\, \xi^k\,,$$

ce qui montre que l'on définit bien ainsi une fonction de ξ qui se présente comme la somme d'une série entière de rayon de convergence infini ; la fonction $\widehat{h}$ est donc bien développable en série entière avec un rayon de convergence infini.

IIb.

La fonction H est bien définie ponctuellement car, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des entiers k tels que $x - k \in [-M, M]$ est fini ; il n'y a donc de fait qu'un nombre fini de $h(x - k)$ à ajouter pour définir $H(x)$. On a trivialement

$$H(x+1) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(x+1-k) = \sum_{k'\in\mathbb{Z}} h(x-k') = H(x)$$

(grâce au changement d'indice $k \mapsto k' = k - 1$), ce qui montre que H est 1-périodique. La fonction H est clairement mesurable car, sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$, elle se présente comme une somme finie de fonctions mesurables, à savoir des translatées de la fonction h. La fonction H est aussi intégrable sur $[0,1]$ car

$$\int_0^1 |H(x)|dx \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |h(x-k)|dx \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-k}^{-k+1} |h(u)|du = \int_{-M}^{M} |h(u)|du < +\infty\,.$$

On a, pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\widehat{H}_k := \int_0^1 H(x)e^{-2i\pi kx}dx &= \int_0^1 \Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}} h(x-l)\Big)e^{-2i\pi kx}dx \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_{-l}^{-l+1} h(u)e^{-2i\pi ku}du \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(u)e^{-2i\pi ku}du = \widehat{h}(2k\pi)\,;\end{aligned}$$

les interversions séries-intégrales sont ici justifiées car les sommes sont en fait finies et le théorème de Fubini s'applique immédiatement.

IIc.

La fonction H est de classe C^2 car elle s'écrit sur tout intervalle de longueur strictement inférieure à 1 comme une somme finie de fonction de classe C^2 (translatées de h). Via deux intégrations par parties, on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$,

$$\widehat{H}_k = \int_0^1 H(x)e^{-2i\pi kx}dx = \frac{1}{(2i\pi k)^2}\int_0^1 H''(x)e^{-2i\pi kx}dx\,;$$

comme $|H''| \leq C$ sur $[0,1]$ et que la série de Riemann $\sum_{|k|\geq 1} 1/k^2$ converge, on a bien

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{H}_k| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{h}(2k\pi)| < +\infty\,.$$

D'après les rappels des préliminaires, on a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$H(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(x-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{h}(2k\pi)e^{2i\pi kx}$$

(on exploite encore ici le fait que $\widehat{H}_k = \widehat{h}(2k\pi)$ établi au **IIb**).

Le théorème de Lebesgue de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre assure que, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\Big(\frac{d^j\widehat{h}}{d\xi^j}\Big)(\xi) = \mathcal{F}[(-i)^j x^j h](\xi)\,;$$

pour j aisi fixé, la fonction $x \to (-i)^j x^j h$ est de classe C^2 et nulle hors de $[-M, M]$; on peut lui appliquer ce qui précède (cas $j = 0$), ce qui donne :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (-i)^j (x-k)^j h(x-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\frac{d^j \widehat{h}}{d\xi^j}\Big)(2k\pi)\, e^{2i\pi k x} dx.$$

IId.

• $(P1) \Longrightarrow (P2)$

On admet $(P1)$ et l'on montre $(P2)$ par récurrence sur j.
On remarque tout d'abord que la clause $(P1)$ pour $j = 0$ se lit

$$1 \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(x-k)$$

(puisque Q_{-1} est par convention le polynôme nul) ; ceci est aussi exactement l'écriture de la clause $(P2)$ pour $j = 0$.
Supposons maintenant $(P2)$ acquise pour $l = 0, ..., j-1$ (où j est un entier entre 1 et N) (toujours en admettant que $(P1)$ est satisfaite) ; on re-écrit $(P1)$ pour j sous la forme

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^j h(x-k) &\equiv x^j - \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_{j-1}(k) h(x-k) \\
&\equiv x^j - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{l=0}^{j-1} q_{j-1,l} k^l\Big) h(x-k) \\
&\equiv x^j - \sum_{l=0}^{j-1} q_{j-1,l} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^l h(x-k)\Big) \\
&\equiv x^j - \sum_{l=0}^{j-1} q_{j-1,l} (x^l + R_{l-1}(x)) \\
&\equiv x^j + R_{j-1}(x)
\end{aligned}$$

(on a utilisé l'hypothèse inductive concernant $(P2)$ pour passer de la ligne 3 à la ligne 4 dans ces calculs).

• $(P2) \Longrightarrow (P3)$

On commence par re-écrire la clause $(P3)$ en remarquant que les nombres $(d^j \widehat{h}/d\xi^j)(2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, apparaîssent comme la suite des coefficients de Fourier de la fonction 1-périodique et de classe C^2

$$x \mapsto \mathcal{H}_j(x) := (-i)^j \sum_{l \in \mathbb{Z}} (x-l)^j h(x-l)$$

(voir la question **II.c**). La clause $(P3)$ équivaut donc à dire que les fonctions $\mathcal{H}_j$, $j = 0, ..., N$, sont des fonctions constantes.

On peut maintenant montrer que $(P2)$ implique bien $(P3)$; en effet, si j est un entier entre 0 et N,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_j(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Big(\sum_{l=0}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} k^l x^{j-l} \Big) \\
&= \sum_{l=0}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} x^{j-l} \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^l h(x-k) \Big) \\
&= \sum_{l=0}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} x^{j-l} (x^l + R_{l-1}(x)),
\end{aligned}$$

ce qui montre que, sous la clause $(P2)$, toutes les fonctions $\mathcal{H}_j$, $j = 0, ..., N$, sont des fonctions polynomiales ; ces fonctions étant périodiques et de période 1, ce sont automatiquement des fonctions constantes, ce qui prouve $(P3)$.

• $(P3) \Longrightarrow (P1)$

On admet $(P3)$ et l'on prouve $(P1)$ par récurrence sur j.

Si l'on suppose que $(P3)$ est remplie, toutes les fonctions $\mathcal{H}_l$, $l = 0, ..., N$, sont des constantes ; c'est en particulier le cas de $\mathcal{H}_0$, qui d'ailleurs vaut identiquement 1 à cause de l'hypothèse faite sur $\widehat{h}(0)$; ceci nous assure donc la validité de $(P1)$ au cran 0.

Supposons que $j \in \{1, ..., N\}$ et que $(P1)$ soit acquise pour $l = 0, ..., j-1$ (toujours en supposant $(P3)$ valide). Grâce à la formule du binôme, on peut écrire, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$k^j = x^j + \sum_{l=1}^{j} \gamma_{j,l} x^{j-l} (x-k)^l ,$$

où les $\gamma_{j,l}$ sont des coefficient binômiaux. On a donc

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^j h(x-k) = x^j \mathcal{H}_0(x) + \sum_{l=1}^{j} \gamma_{j,l}\, x^{j-l}\, \mathcal{H}_l .$$

On a donc

$$x^j - \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^j h(x-k) = -\sum_{l=1}^{j} \gamma_{j,l}\mathcal{H}_l\, x^{j-l}\,.$$

En utilisant l'hypothèse inductive, on obtient donc

$$\begin{aligned} x^j - \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^j h(x-k) &= \sum_{l=1}^{j} \gamma_{j,l}\mathcal{H}_l\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (k^{j-l} + Q_{j-l-1}(k))h(x-k)\Big) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_{j-1}(k)h(x-k)\,, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de $(P1)$ au cran j.

IIe.

Si l'on suppose qu'il existe une telle fonction h, alors, d'après l'équivalence $(P1) \Longleftrightarrow (P3)$ établie au **IId**, toutes les dérivées de la fonction $\widehat{h}$ sont nulles aux point 2π ; la fonction $\widehat{h}$ étant développable en série entière de rayon de convergence infini au voisinage de 0 (voir **IIa**), elle l'est au voisinage de tout point, son développement étant donné par sa série de Taylor. On aurait donc, puisque le développement de Taylor en 2π est nul, $\widehat{h} \equiv 0$, ce qui contredit $\widehat{h}(0) = 1$.

PARTIE III : Projections orthogonales

IIIa.

Dans tout intervalle ouvert du type $]x-M, x+M[$, $x \in \mathbb{R}$, on dénombre au plus $2M$ entiers ; si x est un nombre réel fixé, la somme

$$\sum_{|k|\leq N} \lambda_k h(x-k)$$

contient au plus $2M$ termes non nuls (car le support de h est inclus dans $[-M, M]$. On peut utiliser l'inégalité de Hölder pour obtenir

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{|k|\leq N} \lambda_k h(x-k)\Big|^2 &\leq \Big(\sum_{|k|\leq N} 1 \times |\lambda_k h(x-k)|\Big)^2 \\ &\leq (1 + \overset{2M \text{ fois}}{\cdots} + 1)\Big(\sum_{|k|\leq N} |\lambda_k|^2 |h(x-k)|^2\Big) \\ &\leq 2M\Big(\sum_{|k|\leq N} |\lambda_k|^2 |h(x-k)|^2\Big)\,. \end{aligned}$$

En intégrant l'inégalité obtenue sur $\mathbb{R}$, il vient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{|k|\leq N} \lambda_k h(x-k) \Big|^2 dx &\leq 2M \int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_{|k|\leq N} |\lambda_k|^2 |h(x-k)|^2 \Big) dx \\
&\leq 2M \Big(\sum_{|k|\leq N} |\lambda_k|^2 \int_{\mathbb{R}} |h(x-k)|^2 dx \Big) \\
&\leq 2M \|h\|_2^2 \Big(\sum_{|k|\leq N} |\lambda_k|^2 \Big) .
\end{aligned}$$

IIIb.

Si $(m_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un élément de $l^2(\mathbb{Z})$, on peut définir un élément de V en posant

$$\varphi := \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k h(\cdot - k) .$$

En effet, en reprenant les estimations du **IIIa**, on a, pour toute partie finie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{Z}$,

$$\Big\| \sum_{k\in\mathcal{F}} m_k h(\cdot - k) \Big\|_2^2 \leq 2M \|h\|_2^2 \Big(\sum_{k\in\mathcal{F}} |m_k|^2 \Big) ;$$

la sommabilité (dans l'espace complet V) de la famille $(m_k h(\cdot - k))_{k\in\mathbb{Z}}$ résulte alors de l'application du critère de Cauchy. En utilisant le fait que la transformée de Fourier est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ ainsi que le fait que la transformée de Fourier de $h(\cdot - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, soit la fonction

$$\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} h(x-k) e^{-i\xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} h(u) e^{-i\xi(u+k)} du = e^{-ik\xi} \widehat{h}(\xi) ,$$

on voit que la transformée de Fourier de φ est l'élément de L^2

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k e^{-ik(\cdot)} \Big) \widehat{h} .$$

Si l'on pose

$$m_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} m(x) e^{ikx} dx ,$$

la suite $(m_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ définit bien un élément de $l^2(\mathbb{Z})$ et l'on a

$$m = \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k e^{-ik(\cdot)}$$

dans $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$; la transformée de Fourier de l'élément φ de V construit précisément à partir de cette suite $(m_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est donc la fonction g définie par $g(\xi) = m(\xi)\widehat{h}(\xi)$.

IIIc.

La fonction m_N définie par $m_N(\xi) = \mu(\xi)$ si $|\mu(\xi)| \leq N$ et $m_N(\xi) = 0$ sinon est une fonction mesurable 2π-périodique (comme μ) qui de plus est bornée, donc de carré intégrable sur $[-\pi, \pi]$. La fonction $g_N = m_N\widehat{h}$ est, d'après le **IIIb**, la transformée de Fourier d'un élément φ_N de V. De plus, puisque $|m_N| \leq |\mu|$ et que

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{h}(\xi)|^2 \, |\mu(\xi)|^2 d\xi < +\infty\,,$$

le théorème de convergence dominée de Lebesgue assure

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |g_N(\xi) - \gamma(\xi)|^2 d\xi &= \lim_{N\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{h}(\xi)|^2 \, |m_N(\xi) - \mu(\xi)|^2 d\xi \\ &= \lim_{N\to+\infty} \int_{|\mu(\xi| \geq N} |\widehat{h}(\xi)|^2 \, |\mu(\xi)|^2 d\xi = 0\,.\end{aligned}$$

La suite $(g_N)_N$ converge donc dans $L^2(\mathbb{R})$ vers γ, ce qui implique que la suite φ_N converge vers l'image inverse par Fourier de γ ; cette image inverse est donc un élément f du sous-espace fermé V.

IIId.

La fonction $\widehat{h}$ est, d'après le **IIa**, la restriction à l'axe réel d'une fonction entière non identiquement nulle ; le principe des zéros isolés implique que les zéros de $\widehat{h}$ sont isolés dans le plan complexe ; le théorème de Bolzano-Weierstrass enfin assure qu'il ne saurait n'y en avoir qu'au plus un nombre fini sur le compact $[-\pi, \pi]$.

Une intégration par parties assure, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$,

$$\widehat{h}(\xi) = \int_{-M}^{M} h(x) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{(i\xi)} \int_{-M}^{M} h'(\xi) e^{-i\xi x} dx\,,$$

d'où il résulte

$$|\widehat{h}(\xi)| \leq \frac{2M\|h'\|_\infty}{|\xi|}\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^*\,.$$

Cette majoration suffit à assurer que pour tout $\xi \in [-\pi, \pi]$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{h}(\xi + 2k\pi)|^2 < +\infty\,;$$

d'autre part, pour tout ξ de $[-\pi,\pi]$ tel que $\widehat{h}(\xi)\neq 0$ (donc pour tout $\xi\in[-\pi,\pi]$ en dehors d'un ensemble au plus fini de points)

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{h}(\xi+2k\pi)|^2 \geq |\widehat{h}(\xi)|^2 > 0\,.$$

La fonction positive

$$\xi\mapsto \Psi(\xi) := \frac{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(\xi+2k\pi)|\,|\widehat{h}(\xi+2k\pi)|}{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{h}(\xi+2k\pi)|^2}\ |\widehat{h}(\xi)|$$

est une fonction mesurable à valeurs dans $[0,+\infty]$ (elle est construite à partir des opérations usuelles –somme dénombrable, produit, quotient– et d'une collection de fonctions mesurables). Cette fonction est de carré intégrable car

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \Psi(\xi)^2 d\xi &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(\xi+2k\pi)|^2}{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{h}(\xi+2k\pi)|^2}\ |\widehat{h}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_{-\pi+2l\pi}^{\pi+2l\pi} \frac{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(\xi+2k\pi)|^2}{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{h}(\xi+2k\pi)|^2}\ |\widehat{h}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(\xi+2k\pi)|^2}{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{h}(\xi+2k\pi)|^2}\ |\widehat{h}(\xi+2l\pi)|^2 d\xi \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(\xi+2k\pi)|^2\Big) d\xi \leq \|f\|_2^2
\end{aligned}$$

en utilisant d'abord l'inégalité de Cauchy-Schwarz (ligne 1), puis la relation de Chasles (ligne 2), enfin Fubini-Tonelli (passage à la dernière ligne). Il résulte de ces estimations que la série

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi+2k\pi)\overline{\widehat{h}}(\xi+2k\pi)$$

converge absolument pour presque tout ξ et que la fonction

$$\xi\mapsto \mu(\xi) := \frac{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi+2k\pi)\overline{\widehat{h}}(\xi+2k\pi)}{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{h}(\xi+2k\pi)|^2}$$

(définie presque partout sur $\mathbb{R}$) est une fonction mesurable 2π-périodique telle que

$$\int_{\mathbb{R}} |\mu(\xi)|^2 \, |\widehat{h}(\xi)|^2 d\xi < +\infty\,;$$

on peut donc lui appliquer à $Lf = \mu\widehat{h}$ la conclusion du **IIIc**, à savoir que Lf est la transformée de Fourier d'un élément de V.

IIIe.

On sait que Lf est la transformée de Fourier d'un élément Φ de V ; pour vérifier $\Phi = Pf$, il suffit de montrer que $\Phi - f$ est orthogonal aux $h(\cdot - k_0)$, $k_0 \in \mathbb{Z}$, ou encore, en exploitant le fait que la transformation de Fourier réalise une isométrie, que $Lf - \widehat{f}$ est orthogonal aux fonctions du type $\widehat{h}e^{-ik_0(\cdot)}$, $k_0 \in \mathbb{Z}$. Or, si l'on écrit $Lf = \mu\widehat{h}$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \Big[\mu(\xi)\widehat{h}(\xi) - \widehat{f}(\xi)\Big]\overline{\widehat{h}(\xi)}e^{ik_0\xi}d\xi \\
= &\sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} \Big[\mu(\xi)\widehat{h}(\xi+2l\pi) - \widehat{f}(\xi+2l\pi)\Big]\overline{\widehat{h}(\xi+2l\pi)}e^{ik_0\xi}d\xi \\
= &\sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} \Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi+2k\pi)\overline{\widehat{h}(\xi+2k\pi)} - \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi+2l\pi)\overline{\widehat{h}(\xi+2l\pi)}\Big]e^{ik_0\xi}d\xi \\
= &\ 0\,.
\end{aligned}$$

PARTIE IV: Transformées de Fourier de fonctions holomorphes

IVa.

On a, par l'inégalité triangulaire, pour tour z dans le disque ouvert de centre 1 et de rayon 1,

$$|\mathrm{Log}\, z| \leq \sum_{k\geq 1} \frac{|1-z|^k}{k} = \ln\Big[\frac{1}{1-|z-1|}\Big]$$

puisque, pour tout $t \in [0,1[$,

$$-\ln(1-t) = \int_0^t \frac{du}{1-u} = \int_0^t \Big(\sum_{k\geq 0} u^k\Big)du = \sum_{k\geq 1} \frac{t^k}{k}$$

(on peut intervertir série et intégrale car la convergence de la série est normale sur $[0,t]$).

La fonction

$$\theta:\ t \mapsto 2t + \ln(1-t)$$

est croissante sur $[0,1/2]$ car

$$\theta'(t) = \frac{1-2t}{1-t}\,, \quad t \in [0,1[\,;$$

comme $\theta(0)=0$, on a $\theta \geq 0$ sur $[0,1/2]$, ce qui implique

$$-\ln(1-|z-1|) \leq 2|z-1|$$

si $|z-1| \leq 1/2$, d'où $|\mathrm{Log}\, z| \leq 2|z-1|$ si $|z-1| \leq 1/2$.

IVb.

Comme le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{k\geq 1} \frac{X^k}{k}$$

vaut 1, on peut pour calculer $(d/dz)\,\mathrm{Log}\, z$ lorsque $|z-1|<1$ dériver terme à terme la série définissant $\mathrm{Log}\, z$; on obtient ainsi

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Log}\, z = \sum_{k\geq 0}(1-z)^k = \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z}$$

pour tout z tel que $|z-1|<1$. On a donc, toujours dans $D(1,1)$,

$$\frac{d}{dz}[ze^{-\mathrm{Log}\, z}] = e^{-\mathrm{Log}\, z}(1-\frac{z}{z}) = 0\,,$$

ce qui montre, puisque $D(1,1)$ est connexe, que la fonction $z \mapsto ze^{-\mathrm{Log}\, z}$ y est constante, égale à sa valeur en $z=1$, soit 1 ; on a donc

$$e^{\mathrm{Log}\, z} = z$$

pour tout $z \in D(1,1)$.

IVc.

Puisque la série de fonctions $\sum_n g_n$ est supposée normalement convergente sur Ω, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$k \geq n_0 \Longrightarrow \|g_k\|_\infty \leq 1/2\,.$$

On écrit alors, pour $n \geq n_0$

$$\gamma_n = \prod_{k=1}^{n_0}(1+g_k) \times \prod_{k=n_0+1}^{n} \exp(\mathrm{Log}\,(1+g_k))$$

(en uilisant la conclusion de **IVb**). On a

$$\sum_{k>n_0} \|\mathrm{Log}\,(1+g_k)\|_\infty \le 2 \sum_{k>n_0} \|g_k\|_\infty < +\infty$$

en tenant compte des estimations du **IVa** et du fait que $\|g_k\|_\infty \le 1/2$ si $k > n_0$. La série de fonctions $\sum_{k>n_0} \mathrm{Log}\,(1+g_k)$ converge donc normalement sur Ω vers une fonction holomorphe F. Comme l'exponentielle est uniformément continue sur le compact $\overline{D(0,1)}$, la suite de fonctions

$$\Big(\prod_{k=n_0+1}^{n}(1+g_k)\Big)_{n>n_0} = \Big(\exp(\sum_{k=n_0+1}^{n} \mathrm{Log}\,(1+g_k))\Big)_{n>n_0}$$

converge uniformément sur Ω vers $\exp F$. La suite $(\gamma_n)_{n\ge 1}$ converge donc uniformément sur Ω vers

$$G = \prod_{k=1}^{n_0}(1+g_k) \times \exp F = \prod_{k=1}^{+\infty}(1+g_k)\,.$$

Cette fonction G ne peut s'annuler en un point z_0 que si le produit

$$\prod_{k=1}^{n_0}(1+g_k)$$

s'annule en z_0, soit si l'une des fonctions $1+g_k$, $k=1,...,n_0$, s'annule en z_0.

IVd.

Si K est un compact de $\mathbb{C}$, K est inclus dans un disque ouvert $D(0,R)$. Il existe (d'après par exemple l'inégalité des acccroissements finis) une constante $C_R = \|g'\|_{D(0,R)}$ telle que

$$\forall z \in D(0,R)\,, \quad |g(z)-1| \le C_R|z|\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$g_n = g((\cdot)/2^n) - 1\,.$$

La série $\sum_n g_n$ converge normalement dans $D(0,R)$ car

$$\sum_{n\ge 1} \|g_n\|_{D(0,R)} \le C_R \sum_{n\ge 1} \frac{1}{2^n} = C_R\,.$$

La suite de fonctions

$$(\gamma_n)_{n\geq 1} = \Big(\prod_{k=1}^{n} g((\cdot)/2^k)\Big)_{n\geq 1} = \Big(\prod_{n\geq 1}(1+g_n)\Big)_{n\geq 1}$$

converge donc uniformément sur $D(0,R)$ (d'après le **IVc**), donc sur K, vers la fonction

$$G = \prod_{k=1}^{+\infty} g((\cdot)/2^k)\,.$$

Comme K est arbitraire, la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ vers G a bien lieu uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$.

IVe.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Puisque, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$,

$$|g(z/2^k)| \leq \inf(1, \frac{2^k}{|\mathrm{Re}\, z|})\, e^{\frac{|\mathrm{Im}\, z|}{2^k}} \leq e^{\frac{|\mathrm{Im}\, z|}{2^k}}\,,$$

on a, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$|G(z)| \leq \Big(\prod_{l=1}^{k} \inf(1, \frac{2^l}{|\mathrm{Re}\, z|})\Big) \exp\Big(\sum_{l=1}^{+\infty} \frac{|\mathrm{Im}\, z|}{2^l}\Big) \leq \inf(1, \frac{2^{\frac{k(k+1)}{2}}}{|\mathrm{Re}\, z|^k})\, e^{|\mathrm{Im}\, z|}\,.$$

Pour $k=0$, on se contente de majorer $|G|$ par

$$\prod_{l\geq 1} e^{\frac{|\mathrm{Im}\, z|}{2^l}} = e^{|\mathrm{Im}\, z|}\,.$$

IVf.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a, d'après le **IVe**,

$$|G(\xi)| \leq \inf(1, \frac{2^{\frac{k(k+1)}{2}}}{|\xi|^k})\,;$$

on peut donc appliquer de manière itérative le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre de Lebesgue pour affirmer que la fonction H est de classe C^∞ et que

$$H^{(j)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi)(i\xi)^j e^{ix\xi} d\xi$$

(on utilise l'estimation précédente avec $k = j + 2$ si l'on souhaite prouver que H est bien ce classe C^j et que sa dérivée à l'ordre j s'exprime comme ci-dessus).

IVg.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme la fonction

$$z \mapsto G(z)e^{ixz}$$

est une fonction entière, l'intégrale curviligne de la forme différentielle

$$\frac{1}{2\pi} G(\zeta)e^{ix\zeta}d\zeta$$

sur le bord (orienté dans le sens trigonométrique) du rectangle de sommets $-R, R, R+iy, -R+iy$ (dans cet ordre) est nulle. On majore les contributions à cette intégrale données par les segments verticaux en utilisant le fait que, si u est un nombre réel tel que $|u| \leq |y|$ et si $R > 2$,

$$|G(\pm R + iu)| \leq \frac{2}{R} e^{|y|}$$

(estimations du **IVe** avec $k = 1$). Ces contributions sont donc estimées par

$$\frac{|y|e^{|y|(1+|x|)}}{\pi R}$$

et tendent vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$. Les estimations du **IVe**, avec cette fois $k = 2$, assurent la convergence des intégrales curvilignes

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+iy}^{+\infty+iy} G(\zeta)e^{ix\zeta}d\zeta \, .$$

Ces deux intégrales sont égales d'après ce qui précède (puisqu'elles sont limites des intégrales tronquées entre $-R$ et R ou entre $-R + iy$ et $R + iy$ en vertu du théorème de convergence dominée de Lebesgue). On a donc

$$H(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+iy}^{+\infty+iy} G(\zeta)e^{ix\zeta}d\zeta = \frac{e^{-xy}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi + iy)e^{i\xi x}d\xi \, .$$

On en déduit, en utilisant les estimations du **IVe** avec $k = 2$,

$$|H(x)| \leq \frac{1}{2\pi} e^{-xy+|y|} \int_{\mathrm{R}} \inf(1, \frac{2^{3/2}}{|\xi|^2}) d\xi\,;$$

si l'on fait tendre y vers $+\infty$ (si $x > 1$) ou vers $-\infty$ (si $x < -1$), on voit que dans l'une ou l'autre de ces situations $H(x) = 0$. La fonction H est donc à support compact, de support inclus dans $[-1, 1]$.

PARTIE V : la fonction U de Rvachev

Va.

On part de la formule de duplication du sinus

$$\sin z = 2 \sin(z/2) \cos(z/2)$$

que l'on itère N fois pour obtenir

$$\sin z = 2^N \sin(z/2^N) \prod_{k=1}^{N} \cos(z/2^k)\,;$$

on a donc, pour tout z non nul (puis ensuite par continuité pour tout z en prolongeant la fonction sinuscardinal $\sin z/z$ par 1 en $z = 0$)

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{\sin \frac{z}{2^N}}{\frac{z}{2^N}} \prod_{k=1}^{N} \cos(z/2^k)\,;$$

comme

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\sin \frac{z}{2^N}}{\frac{z}{2^N}} = 1\,,$$

on en déduit

$$\lim_{N\to+\infty} \prod_{k=1}^{N} \cos(z/2^k) = \frac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{+\infty} \cos(z/2^k)\,.$$

On peut ainsi majorer $|\sin z/z|$ par

$$\left|\frac{\sin z}{z}\right| \leq \prod_{k=1}^{+\infty} \Big(\frac{e^{\frac{\mathrm{Im}\, z}{2^k}} + e^{\frac{-\mathrm{Im}\, z}{2^k}}}{2}\Big) \leq \exp\Big(\mathrm{Im}\, z| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\Big) = e^{|\mathrm{Im}\, z|}\,;$$

mais on a aussi
$$\Big|\frac{\sin z}{z}\Big| \leq \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{|\operatorname{Re} z|}\,,$$
d'où, en prenant en compte les deux majorations ci-dessus,
$$\Big|\frac{\sin z}{z}\Big| \leq \inf(1, \frac{1}{|\operatorname{Re} z|})\, e^{|\operatorname{Im} z|}\,,$$

Vb.

On est exactement dans les hypothèses de la partie **IV** (questions **IVf** et **IVg**) en posant $g(z) = \sin z/z$, $g(0) = 1$ (cette fonction est entière car 0 est une singularité fictive puisque la fonction est continue en ce point). La fonction U joue dans ce cas particulier le rôle de la fonction L du **IVf** et en a toutes les propriétés.

Vc.

U est par définition la transformée de Fourier de la fonction
$$\xi \mapsto \prod_{j=1}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{\xi}{2^j})}{\frac{\xi}{2^j}}$$
qui est bien une fonction intégrable car majorée par $\inf(1, 1/|\xi|^2)$ puisque $|\sin\xi/\xi| \leq 1$ sur $\mathbb{R}$. La fonction U est aussi intégrable car de classe C^∞ et à support compact dans $[-1,1]$. D'après la formule d'inversion de Fourier rappelée dans les préliminaires, on a donc bien
$$\widehat{U}(\xi) = \prod_{j=1}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{\xi}{2^j})}{\frac{\xi}{2^j}}\,.$$
On a donc
$$\widehat{U}(2\xi) = \prod_{j=1}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{\xi}{2^{j-1}})}{\frac{\xi}{2^{j-1}}} = \frac{\sin\xi}{\xi}\,\widehat{U}(\xi)\,.$$
La transformée de Fourier de
$$x \mapsto 2U(2x+1) - 2U(2x-1)$$
vaut, en utilisant des changements de variables comme au **Ib**,
$$\xi \mapsto 2i\sin(\xi/2)\,\widehat{U}(\xi/2)\,;$$

d'autre part, par une intégration par parties immédiate, la transformée de Fourier de U' vaut

$$\xi \mapsto i\xi \widehat{U}(\xi)\,;$$

La formule

$$\widehat{U}(\xi) = \frac{\sin \xi/2}{\xi/2}\, \widehat{U}(\xi/2)$$

implique donc, en multipliant par $i\xi$ puis en prenant les transformées de Fourier inverses, l'identité

$$U'(x) = 2U(2x+1) - 2U(2x-1)\,.$$

Vd.

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ toutes les propriétés (sauf la continuité, valable seulement pour $n \geq 2$) concernant σ_n.
Pour $n = 1$, la fonction $\sigma_1 = \chi$ est bien mesurable, positive, inférieure ou égale à 1, d'intégrale 1, et de support dans $[-1, 1]$.
Admettons que σ_n ait toutes ces propriétés ; la fonction σ_{n+1} est par définition la convolée de χ avec la fonction $\widetilde{\sigma}_n = 2\sigma_n(2(\cdot))$ de support dans $[-1/2, 1/2]$; comme le support d'une convolée est inclus dans la somme de Minkowski des supports, σ_{n+1} est bien de support dans $[-1/2, 1/2] + [-1/2, 1/2] = [-1, 1]$. La positivité de σ_{n+1} est évidente (intégrale d'une fonction positive) ; enfin, on a, puisque la transformation de Fourier transforme l'opération algébrique de convolution en celle de multiplication,

$$\widehat{\sigma_{n+1}}(0) = \widehat{\chi}(0)\widehat{\widetilde{\sigma}_n}(0) = 2\int_{\mathbb{R}} \sigma_n(2t)dt = \int_{\mathbb{R}} \sigma_n(t)dt = 1\,.$$

Comme $\chi \leq 1$ et $\sigma_n \geq 0$, on a

$$\sigma_{n+1}(x) \leq 2\int_{\mathbb{R}} \sigma_n(2t)dt = 1\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

On a d'autre part

$$\sigma_2(x) = 2\int_{-1/4}^{1/4} \chi(x-t)dt = \mathrm{mes}\,([-1/4, 1/4] \cap [x - 1/2, x + 1/2])\,,$$

ce qui montre que σ_2 est une fonction continue affine par morceaux ; pour $n \geq 2$, on a aussi (par changement de variable correspondant à la commutativité de l'opération de convolution)

$$\sigma_{n+1}(x) = 2\int_{-1/2}^{1/2} \sigma_n(2(x-u))du\,;$$

la continuité de σ_{n+1} se déduit de celle de σ_n en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue (la fonction σ_n continue positive et à support compact est uniformément majorée sur $\mathbb{R}$ et l'on peut utiliser la fonction constante correspondant à ce majorant comme chapeau d'intégration sur $[-1/2, 1/2]$). Les fonctions σ_n, $n \geq 2$, sont ainsi toutes continues.

Ve.

Comme $\sigma_{n+1} = \widetilde{\sigma_n} * \chi$, on a

$$\widehat{\sigma}_{n+1} = \widehat{\widetilde{\sigma_n}} * \widehat{\chi}\,,$$

où encore, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{\sigma_{n+1}}(\xi) = \widehat{\sigma_n}(\xi/2)\frac{\sin(\frac{\xi}{2})}{\frac{\xi}{2}}$$

en itérant, il vient bien, pour tout $n \geq 1$

$$\widehat{\sigma_n}(\xi) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin\frac{\xi}{2^j}}{\frac{\xi}{2^j}}\,.$$

Pour $n \geq 4$, on peut majorer $|\widehat{\sigma_n}|$ par

$$|\widehat{\sigma_n}(\xi)| \leq \inf(1, \frac{2^{10}}{|\xi|^4}) \qquad (\dagger)$$

puisque $|\sin\xi/\xi| \leq 1$ sur $\mathbb{R}$; ceci montre que la transformée de Fourier de σ_n est bien intégrable si $n \geq 4$ (d'ailleurs $n \geq 2$ suffirait pour ce point) et l'on a donc, via la formule d'inversion rappelée dans les préliminaires

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{R}} \Big(\prod_{j=1}^{n} \frac{\sin\frac{\xi}{2^j}}{\frac{\xi}{2^j}}\Big) e^{ix\xi} dx\,.$$

Si $n \geq 4$, il résulte du théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre de Lebesgue (applicable deux fois du fait de l'estimation (†) ci-dessus) que σ_n est de classe C^2 et que l'on a

$$\sigma_n^{(k)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{R}} \Big(\prod_{j=1}^{n} \frac{\sin\frac{\xi}{2^j}}{\frac{\xi}{2^j}}\Big)(i\xi)^k e^{ix\xi} dx\,, \quad k = 1, 2\,.$$

On a, toujours puisque $|\sin \xi/\xi| \leq 1$ sur $\mathbb{R}$ et lorsque $n \geq 2$,

$$\max(|\widehat{\sigma_n}(\xi), \widehat{U}(\xi)) \leq \inf(1, \frac{8}{|\xi|^2})\,;$$

d'autre part, pour tout $\xi \in \mathbf{R}$, on a

$$\lim_{N \to +\infty} |\widehat{\sigma_n}(\xi) - \widehat{U}(\xi)| = 0$$

du fait de la formule pour $\widehat{U}$ établie au **Vc**. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue s'applique donc ici et l'on a

$$\lim_{N \to +\infty} \int_{\mathrm{R}} |\widehat{\sigma_n}(\xi) - \widehat{U}(\xi)| d\xi = \int_{\mathrm{R}} \lim_{N \to +\infty} |\widehat{\sigma_n}(\xi) - \widehat{U}(\xi)|\, d\xi = 0\,.$$

Toujours par la formule d'inversion de Fourier, on a, si $n \geq 2$,

$$|\sigma_n(x) - U(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathrm{R}} |\widehat{\sigma_n}(\xi) - \widehat{U}(\xi)| d\xi\,;$$

on déduit donc de ce qui précède la convergence uniforme de σ_n vers U sur l'axe réel.

Vf.

Comme $\sigma_n \geq 0$ (voir **Vd**), on a, par passage à la limite (**Ve**), que U est bien à valeurs dans $[0, +\infty[$. Si $x \in [-1, 0]$, $2x - 1 \in [-3, -1]$, et l'on a donc $U(2x - 1) = 0$; comme $U'(x) = 2U(2x + 1) - 2U(2x - 1)$ (**Vc**), on en déduit que si $x \in [0, 1]$, $U'(x) = 2U(2x + 1) \geq 0$, ce qui montre que U est croissante sur $[-1, 0]$. De même, si $x \in [0, 1]$, $2x + 1 \in [1, 3]$ et $U(2x + 1) = 0$; la même relation montre qu'alors $U'(x) = -2U(2x - 1) \leq 0$, ce qui prouve que U est décroissante sur $[0, 1]$. D'ailleurs, on aaurait pu remarquer que U était une fonction paire.
Comme U ne peut être identiquement nulle (car $\widehat{U}$ ne l'est pas), on a $U(0) > 0$. Soit $\alpha = \inf\{t \in]-1, 0[\,;\, U(t) \neq 0\}$; supposons $\alpha > -1$ (sinon, on a bien $U > 0$ sur $]-1, 0]$ et donc par parité sur $]-1, 1[$). Pour $x \in]\alpha, -\alpha]$, on a $U(x) > 0$; en particulier si $x \in](\alpha-1)/2, (-1-\alpha)/2[$, $2x+1 \in]\alpha, -\alpha[$ et alors $U(2x + 1) > 0$; la fonction U' est donc strictement positive sur l'intervalle $](\alpha - 1)/2, \inf(\alpha, -1/2)[$, intervalle sur lequel U est supposée identiquement nulle ; ceci est absurde et l'on a bien $\alpha = -1$ et $U > 0$ sur $]-1, 1[$.

Vg.

On est (en prenant $h = U$) dans les hypothèses de la question **IIIc** ; en effet

$$\widehat{U}(2k\pi) = \frac{\sin(k\pi)}{k\pi} \prod_{j\geq 2} \frac{\sin \frac{k\pi}{2^{j-1}}}{\frac{k\pi}{2^{j-1}}} = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} U(x-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{U}(2k\pi) e^{2ik\pi x} = 1\,. \tag{††}$$

En particulier, puisque $U(k) = 0$ pour tout entier $|k| \geq 1$ (U est de support dans $[-1,1]$), on a $U(0) = 1$ (en utilisant la formule (††) ci-dessus pour $x = 0$).

Vh.

On montre ces résultats par récurrence en utilisant la relation

$$U'(x) = 2(U(2x+1) - U(2x-1))$$

qui devient, en itérant,

$$U''(x) = 4(U'(2x+1) - U'(2x-1))$$

ou, plus généralement, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^{N+1}}{dx^{N+1}} U = 2^{N+1}\Big(\frac{d^N U}{dx^N}(2x+1) - \frac{d^N U}{dx^N}(2x-1)\Big)\,.$$

Le maximum de $|U|$ vaut 1 et est atteint en 0 ; comme $U'(x) = 2(U(2x+1) - U(2x-1))$, le maximum de $|U'|$ vaut 2 fois le module de l'écart maximum des valeurs prises par U aux extrémités d'un intervalle glissant de longueur 2, soit $\|U'\|_\infty = 2$. De plus, la formule $U'(x) = 2(U(2x+1) - U(2x-1))$ montre que U' est strictement positive sur $]-1,0[$, nulle en 0, strictement négative sur $]0,1[$. On itère ce raisonnement au cran suivant, exploitant cette fois la relation $U''(x) = 4(U'(2x+1) - U'(2x-1))$; cette fonction est strictement positive sur $]-1,-1/2[$, s'annule en $1/2$, est strictement négative sur $]-1/2,0[$, s'annule encore en 0, redevient strictement négative sur $]0,1/2[$, s'annule encore en $1/2$, puis redevient strictement positive sur $]1/2,1[$; le maximum du module vaut 8. On justifie ce raisonnement en examinant ce qui se passe lorsque l'on fait glisser une fenêtre de longueur 2 le long de l'intervalle $[-1,1]$ en examinant comment varie la différence des valeurs de U' prises aux points extrêmes de la fenêtre. Le même raisonnement s'applique pour passer de $U^{(N)}$ à $U^{(N+1)}$ et l'on voit que la norme $\|U^{(N+1)}\|_\infty$ s'obtient en multipliant par 2^{N+1} l'écart extrême obtenu pour $U^{(N)}$, soit

$$\|U^{(N+1)}\|_\infty = 2^{N+1}\|U^{(N)}\|_\infty .$$

On en déduit ainsi par récurrence

$$\|U^{(N)}\|_\infty = 2^{1+2+\cdots+N} = 2^{\frac{N(N+1)}{2}} .$$

On voit aussi (toujours par récurrence et en faisant glisser la fenêtre de longueur 2 le long du graphe de $U^{(N)}$) que les zéros de $U^{(N+1)}$ sont les points $k/2^N$, $|k| < 2^N$, $k \in \mathbb{Z}$.

PARTIE VI : Quelques propriétés de U

On introduit, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la fonction h_N de classe C^∞ et de support dans $[-2^N, 2^N]$ définie par

$$h_N(x) := \frac{1}{2^N} U(x/2^N) .$$

La fonction h_N vérifie bien

$$\widehat{h_N}(0) = \frac{1}{2^N}\int_{\mathbb{R}} U(t/2^N)dt = \widehat{U}(0) = 1$$

et l'on peut donc utiliser la clause $(P1)$ du **IId** pour affirmer qu'il existe pour tout $p \in \{0, ..., N\}$, un polynôme $Q_{p-1,N}$ de degré inférieur ou égal à $p-1$, tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$y^p = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (k^p + Q_{p-1,N}(k))h_N(y-k) ,$$

ou encore, si $y = 2^N x$,

$$2^{Np}x^p = \frac{1}{2^N}\sum_{k\in\mathbb{Z}} (k^p + Q_{p-1,N}(k))U(x - k2^{-N}) ,$$

soit

$$x^p = \frac{1}{2^{N(p+1)}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} (k^p + Q_{p-1,N}(k))U\Big(x - \frac{k}{2^N}\Big) .$$

VIb.

• On introduit les deux sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$ que sont d'une part V_N, d'autre part le sous-espace W_N des éléments de $L^2(\mathbb{R})$ tels que $\widehat{f}$ soit nulle presque partout hors de $[-2^N\pi, 2^N\pi]$; si Q_N désigne l'opérateur de projection orthogonale sur W_N, on a $f_N = Q_N[f]$. On a, de par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \|f - Q_N[f]\|_2 + \|Q_N[f] - P_N \circ Q_N[f]\|_2 &= \|f - f_N\|_2 + \|f_N - P_N f_N\|_2 \\ &\geq \|f - P_N \circ Q_N[f]\|_2 \,; \end{aligned}$$

du fait de la définition de la projection orthogonale sur V_N et de ce que $P_N \circ Q_N[f] \in V_N$, on a

$$\|f - P_N \circ Q_N[f]\|_2 \geq \|f - P_N f\|_2 \,,$$

d'où l'inégalité voulue.

• Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$. La projection orthogonale $L_N(g)$ de g sur le sous-espace engendré par les fonctions

$$y \mapsto \frac{1}{2^N} U\Big(\frac{y-k}{2^N}\Big)$$

est donnée, de par le résultat établi au **IIIe**, par

$$\widehat{L_N(g)}(\xi) = \frac{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(\xi + 2k\pi)\overline{\widehat{U}(2^N(\xi + 2k\pi))}}{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |U(2^N(\xi + 2k\pi)|^2}\, \widehat{U}(2^N\xi)\,.$$

La projection orthogonale de $f \in L^2(\mathbb{R})$ sur le sous-espace engendré par les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{2^N} U\Big(\frac{2^N x - k}{2^N}\Big)$$

s'obtient, une fois effectué le changement de variable $y = 2^N x$, comme la projection orthogonale de

$$y \mapsto f(y/2^N)$$

sur le sous-espace engendré par les fonctions

$$y \mapsto \frac{1}{2^N} U\Big(\frac{y-k}{2^N}\Big)\,;$$

sa transformée de Fourier (on revient à la variable x) est donc donnée par

$$\widehat{P_N(f)}(\xi) = \frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + 2^N 2k\pi))\overline{\widehat{U}(\xi + 2^N 2k\pi))}}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{U}(\xi + 2^N 2k\pi)|^2}\, \widehat{U}(\xi)\,.$$

On a, compte tenu du théorème de Pythagore,

$$\|f_N - P_N f_N\|_2^2 = \|f_N\|_2^2 - \|P_N f_N\|_2^2\,;$$

Puisque

$$\|f_N\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-2^N\pi}^{2^N\pi} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\,,$$

la formule à établir équivaut à la formule

$$\|P_N f_N\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-2^N\pi}^{2^N\pi} |\widehat{f}(\xi)|^2 \frac{|\widehat{U}(\xi)|^2}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{U}(\xi + 2^N 2k\pi)|^2} d\xi\,.$$

On établit cette formule en exploitant le fait que $\widehat{P_N f_N}$ s'écrive sous la forme

$$\widehat{P_N f_N}(\xi) = \omega_N(\xi)\widehat{U}(\xi)\,,$$

où ω_N est une fonction $2^N 2\pi$-périodique (explicitée plus haut) ; alors, toujours par Plancherel, puis en tenant compte du fait que $\widehat{f}_N$ est de support dans $[-2^N\pi, 2^N\pi]$,

$$\begin{aligned}
\|P_N f_N\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\int_{-2^N\pi}^{2^N\pi} |\omega_N(\xi)|^2 |\widehat{U}(\xi + 2^N 2l\pi)|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-2^N\pi}^{2^N\pi} \frac{|\widehat{f}(\xi)|^2\,|\widehat{U}(\xi)|^2}{\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{U}(\xi + 2^N 2l\pi)|^2} d\xi\,.
\end{aligned}$$

Ceci prouve bien la formule voulue.

VIc.

• D'après le résultat établi au **Vc**, on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a, pourvu que $\xi/2^N \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\widehat{U}(\xi + 2^N 2k\pi) \;=\; \frac{\sin(\xi/2 + 2^{N-1}2k\pi)}{\xi/2 + 2^{N-1}2k\pi}\, \widehat{U}(\xi/2 + 2^{N-1}2k\pi)$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(\prod_{j=1}^{N} \frac{\sin(\xi/2^j + 2^{N-j}2k\pi)}{\xi/2^j + 2^{N-j}2k\pi}\Big)\, \widehat{U}(\xi/2^N + 2k\pi) \\
&= 2^{N(N+1)/2}\Big(\prod_{j=1}^{N} \sin(\xi/2^j)\Big)\, \frac{\widehat{U}(\xi/2^N)}{(\xi + 2^N 2k\pi)^N}\,;
\end{aligned}
$$

en reportant ces égalités au niveau de chaque terme figurant dans les sommes impliquées au numérateur et dénominateur de l'expression

$$
\frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |\widehat{U}(\xi + 2^N 2k\pi)|^2}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{U}(\xi + 2^N 2k\pi)|^2}
$$

on trouve bien la formule demandée.

• On a, pour tout ξ tel que $\xi/2^N \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $\xi \neq 0$, la minoration triviale

$$
\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|\widehat{U}(\xi/2^N + 2k\pi)|^2}{|\xi + 2^N 2k\pi|^{2N}} \geq \frac{|\widehat{U}(\xi/2^N)|^2}{|\xi|^{2N}} \tag{$*$}
$$

(on minore une somme de termes positifs par l'un quelconque d'entre eux) ; pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, on a aussi, toujours pour un tel ξ, la minoration

$$
|\xi + 2^N 2k\pi| \geq 2^N \pi\,,
$$

ce qui permet de majorer pour un tel ξ l'expression

$$
\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{|\widehat{U}(\xi/2^N + 2k\pi)|^2}{|\xi + 2^N 2k\pi|^{2N}}
$$

par

$$
\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{|\widehat{U}(\xi/2^N + 2k\pi)|^2}{|\xi + 2^N 2k\pi|^{2N}} \leq \frac{1}{(2^N\pi)^{2N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |\widehat{U}(\xi/2^N + 2k\pi)|^2\,; \tag{$**$}
$$

en injectant les estimations (*) et (**) au second membre de la formule établie au premier point de cette question, on trouve bien l'inégalité voulue pour tout ξ de $[-2^N\pi, 2^N\pi]$ différent de 0.

Comme

$$
\widehat{U}(\xi) = \prod_{j=1}^{+\infty} \frac{\sin(\xi/2^j)}{\xi/2^j}
$$

(formule établie au **Vc**), la fonction $\widehat{U}$ s'annule en tous les points $2^N 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$; on a donc

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |\widehat{U}(2^N 2k\pi)|^2 = 0\,,$$

ce qui prouve la validité de l'inégalité si $\xi = 0$ (les deux membres de l'inégalité valant 0 dans ce cas).

VId.

• Du fait de la formule

$$\widehat{U}(\xi) = \prod_{j=1}^{+\infty} \frac{\sin(\xi/2^j)}{\xi/2^j}$$

établie au **Vc** et de la dernière affirmation établie au **IVc**, la fonction $\widehat{U}$ ne s'annule qu'aux points ξ où l'une des fonctions

$$\frac{\sin(\xi/2^j)}{\xi/2^j}\,, \quad j \in \mathbb{N}^*,$$

s'annule. Ces points sont les points de la forme $2^j k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$, $j \in \mathbb{N}^*$; l'intervalle $[-\pi, \pi]$ ne contenant aucun tel point, on a bien

$$\alpha = \inf_{|\xi|\leq\pi} |\widehat{U}(\xi)| > 0\,.$$

On a aussi, pour tout ξ de $[-\pi, \pi]$, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$,

$$|\widehat{U}(\xi + 2k\pi)| \leq \frac{1}{|\xi + 2k\pi|} \leq \frac{1}{\pi|k|}$$

(toujours à cause de la formule établie au **Vc**, couplée avec l'estimation de la fonction $|\sin z/z|$ établie au **Va**). On a donc, en vertu du théorème de convergence dominée de Lebesgue (appliqué dans le cadre de l'intégration discrète sur $\mathbb{Z}^*$), la continuité de la fonction

$$\Upsilon \,:\, \xi \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |\widehat{U}(\xi + 2k\pi)|^2$$

sur $[-\pi, \pi]$ (en effet, chacune des fonctions $|\widehat{U}((\cdot) + 2k\pi)|^2$, $k \in \mathbb{Z}^*$, est continue sur $[-\pi, \pi]$ et $(1/(\pi|k|^2))_{k\in\mathbb{Z}^*} \in l^1(\mathbb{Z}^*)$ "coiffe" cette suite de fonctions uniformément par rapport à ξ. La fonction Υ admet donc une borne supérieure β finie (et atteinte) sur $[-\pi, \pi]$.

• Si $|\xi| \leq 2^N\pi$ et $N \geq p$, on a

$$\frac{|\xi|^{2N}}{(2^N\pi)^{2N}} \leq \frac{|\xi|^{2p}}{(2^N\pi)^{2p}} \leq 2^{-2Np}\frac{1}{\pi^{2p}}|\xi|^{2p}\,;$$

en utilisant la formule établie au second point du **VIb**, combinée avec l'inégalité établie au second point du **Vc**, on a donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \{0, ..., N\}$,

$$\begin{aligned} \|f_N - P_N f_N\|_2^2 &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-2^N\pi}^{2^N\pi} \frac{|\xi|^{2N}}{(2^N\pi)^{2N}}|\widehat{f}(\xi)|^2 \frac{\Upsilon(\xi/2^N)}{|\widehat{U}(\xi/2^N)|^2}\,d\xi \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\,\frac{\beta}{\alpha^2}\,\frac{2^{-2Np}}{\pi^{2p}}\,\int_{\mathrm{R}} |\xi|^{2p}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\,; \end{aligned}$$

on a donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $N \geq p$, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\|f_N - P_N f_N\|_2 \leq \frac{2^{-Np}}{\sqrt{2\pi}\pi^p}\,\|\xi^p \widehat{f}\|_2\,\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}\,.$$

D'autre part, on a, du fait de la formule de Plancherel, toujours si p et N sont deux entiers positifs ou nuls tels que $0 \leq p \leq N$,

$$\begin{aligned} \|f - f_N\|_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\int_{|\xi|\geq 2^N\pi} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\int_{|\xi|\geq 2^N\pi} \Big(\frac{|\xi|}{2^N\pi}\Big)^{2p}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{1/2} \\ &\leq \frac{2^{-Np}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\pi^p}\|\xi^p\widehat{f}\|_2\,. \end{aligned}$$

Comme on a

$$\|f - P_N f\|_2 \leq \|f_N - P_N f_N\|_2 + \|f - f_N\|_2$$

(inégalité établie au premier point du **VIb**), on a bien l'inégalité demandée en injectant les estimations respectives de $\|f_N - P_N f_N\|_2$ et $\|f - f_N\|_2$ prouvées pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ dès que N est un entier tel que $N \geq p$.