Sur les transformées de Fourier et de Laplace

Transformée de Fourier et résolution d'EDP

Pour des rappels de bases concernant la notion de transformée de Fourier, on pourra par exemple consulter les ouvrages [Rud95, Laa01].

Exercice 1 *Résolution de l'équation de la chaleur ([Laa01] p. 264)*
On souhaite résoudre l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \dfrac{1}{2}\partial^2_{xx} u(t,x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

où u_0 est une fonction intégrable donnée. On va chercher à résoudre l'équation en supposant que "tout est permis" puis on contrôlera *a posteriori* que tous les calculs sont licites. On suppose ainsi qu'il existe une fonction u solution de (1) telle que, pour tout $t > 0$ fixé,

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t,x)|\, dx < +\infty, \quad \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right| dx < +\infty, \quad \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\right| dx < +\infty.$$

On suppose de plus que pour tout $t > 0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) e^{-itx}\, dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} u(t,x)e^{-itx}\, dx.$$

Considérons alors sa transformée de Fourier (en x) :

$$\hat{u}(t,y) := \int u(t,x)e^{-ixy}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

1. Montrer que $\widehat{\partial_x u}(y) = iy\hat{u}(y)$ et $\widehat{\partial^2_{xx} u}(y) = -y^2\hat{u}(y)$.
   Solution : l'idée naturelle est d'intégrer par parties :

$$\widehat{\partial_x u}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \partial_x u(t,x)e^{-ixy}dx = [u(t,x)e^{-ixy}]^{+\infty}_{-\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times iy \int u(t,x)e^{-ixy}dx. \tag{2}$$

   Il s'agit donc de voir que le terme de bord est nul. C'est clair si $x \mapsto u(t,x)$ est à support compact ce qui n'est malheureusement pas le cas ici comme on le verra plus loin. Une hypothèse faible permettant de conclure est que $x \mapsto u(t,x)$ est C^1, intégrable, de dérivée intégrable. En effet, sous ces hypothèses, les limites $\lim_{x\to\pm\infty} u(t,x)$ existent car on peut écrire

$$u(t,x) = u(t,0) + \int_0^x \partial_x u(t,z)dz,$$

et le dernier terme converge lorsque $x \to \pm\infty$ car $\partial_x u$ est intégrable. Par ailleurs, comme u est intégrable, les limites $\lim_{x\to\pm\infty} u(t,x)$ sont nécessairement nulles et le terme de bord dans (2) est bien nul. Le même argument, sous l'hypothèse supplémentaire que u est C^2 et $\partial_x^2 u$ est intégrable, permet de montrer que $\widehat{\partial_{xx}^2 u}(y) = -y^2\hat{u}(y)$.

2. Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \hat{u}(t,y)$ est solution de
$$\partial_t \hat{u}(t,y) = -\frac{1}{2}y^2\hat{u}(t,y).$$
Solution : il s'agit simplement d'appliquer la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ à chaque membre de l'équation de la chaleur, et d'utiliser d'une part la commutativité de ∂_t et $\mathcal{F}$ (hypothèse ici), et la question précédente.

3. En déduire que
$$\forall t > 0,\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad \hat{u}(t,y) = \hat{u}_0(y)e^{-y^2t/2}.$$
Solution : à y fixé, l'équation obtenue à la question précédente est une bête équation du premier ordre en t que l'on sait intégrer.

4. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $p_t(x) = e^{-x^2/(2t)}/\sqrt{t}$. On peut se souvenir que si Y suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathbb{E}(e^{itY}) = e^{-t^2/2}$.
Solution : on a
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int e^{-\frac{x^2}{2t}}e^{-ixy}dx = e^{-ty^2/2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int e^{-(x+ity)^2/2t}dx = e^{-ty^2/2} \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int e^{-\frac{z^2}{2t}}dz}_{=1}$$

5. En déduire que $\forall t > 0$, $x \in \mathbb{R}$:
$$u(t,x) = u_0 * p_t(x)/\sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int u_0(z)p_t(z-x)\,dx = \mathbb{E}(u_0(x+\sqrt{t}Y)),$$
où Y suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
Solution : d'après le calcul ci-dessus l'équation $\hat{u}(t,y) = \hat{u}_0(y)e^{-y^2t/2}$ s'écrit encore :
$$\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(u_0) \times \mathcal{F}(p_t),$$
or le membre de droite n'est autre que la transformée de Fourier de $u_0 * p_t$ car
$$\mathcal{F}(u_0 * p_t) = \sqrt{2\pi} \times \mathcal{F}(u_0) \times \mathcal{F}(p_t).$$
Par injectivité de la transformée de Fourier, on en déduit que
$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}u_0 * p_t$$

6. On vérifie alors aisément que la solution trouvée u satisfait toutes les hypothèses formulées au début et au long de l'exercice.

Exercice 2 *Résolution de l'équation des cordes vibrantes ([Laa01] p. 267)*
On considère l'équation des cordes vibrantes :

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(t,x) - a^2 \partial_{xx}^2 u(t,x) = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0, \\ u(0,x) = f(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u(0,x)) = g(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3}$$

On suppose d'une part que $f \in C^2(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ et que f' et f'' sont intégrables, et d'autre part que $g \in C^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ et que g' est intégrable. En suivant la même méthode que dans l'exercice précédent, exhiber une solution $u(t,x)$ du système ci-dessus telle que u et ses deux premières dérivées par rapport aux variables t et x soient intégrables.
Solution : Pour varier les plaisirs, on adopte ici la normalisation :

$$\hat{v}(y) = \mathcal{F}(v)(y) := \int v(x) e^{-2\pi i x y} dx.$$

Ainsi, en appliquant la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ à chaque membre de l'équation (3), on obtient

$$\partial_t^2 \hat{u} + 4a^2\pi^2 y^2 \hat{u} = 0,$$

i.e. une équation du second ordre dont la solution générale est de la forme

$$\hat{u}(t,y) = A(y)\cos(2\pi a y t) + B(y)\sin(2\pi a y t).$$

En prenant en compte les conditions initiales, il vient

$$\hat{u}(t,y) = \hat{f}(y)\cos(2\pi a y t) + \frac{\hat{g}(y)}{2\pi a y}\sin(2\pi a y t).$$

Il reste à reconnaître, en chacun des termes du dernier membre de droite, des transformées de Fourier. On vérifie d'une part que :

$$\hat{f}(y)\cos(2\pi a y t) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}(f(x+at))(y) + \mathcal{F}(f(x-at))(y)\right]$$

et d'autre part :

$$\frac{\hat{g}(y)}{2\pi a y}\sin(2\pi a y t) = \frac{1}{2a}\left[\mathcal{F}(g * \mathbb{1}_{[-at,at]})(y)\right].$$

Finalement, via la transformée de Fourier inverse, on obtient la solution de l'équation (3) :

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(f(x+at) + f(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\left[g * \mathbb{1}_{[-at,at]}\right](x),$$

c'est-à-dire

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(f(x+at) + f(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} g(u)du.$$

Transformée de Fourier et principe d'incertitude

Exercice 3 *L'inégalité de Heisenberg*
On se propose de montrer (en partie) le résultat suivant qui a une certaine importance, voire une importance certaine en mécanique quantique...

Théorème 1 *Soit $f \in \mathbb{L}^2 := \mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dx)$, $f \neq 0$, telle que $xf(x) \in \mathbb{L}^2$ et $\xi\hat{f}(\xi) \in \mathbb{L}^2$. On pose*

$$\bar{x}_f := \frac{1}{||f||_2^2}\int_{\mathbb{R}} x|f|^2(x)dx, \quad \bar{\xi}_f := \frac{1}{||\hat{f}||_2^2}\int_{\mathbb{R}} \xi|\hat{f}|^2(\xi)d\xi,$$

et

$$\Delta_f := \left(\frac{1}{||f||_2^2}\int_{\mathbb{R}}(x-\bar{x}_f)^2|f|^2(x)dx\right)^{1/2}, \quad \Delta_{\hat{f}} := \left(\frac{1}{||\hat{f}||_2^2}\int_{\mathbb{R}}(\xi-\bar{\xi}_f)^2|\hat{f}|^2(\xi)d\xi\right)^{1/2}.$$

Alors

$$\Delta_f\Delta_{\hat{f}} \geq \frac{1}{2}, \tag{4}$$

avec égalité si et seulement il existe $\phi, m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$f(x) = \alpha e^{i\phi x}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

1. Déterminer $\bar{x}_g$, $\bar{\xi}_g$, Δ_g, $\Delta_{\hat{g}}$ en fonction des quantités correspondantes pour f lorsque
   (a) $g = \lambda f$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$;
   Solution : ici, rien ne bouge $\bar{x}_g = \bar{x}_f$, $\bar{\xi}_g = \bar{\xi}_f$, $\Delta_g = \Delta_f$, $\Delta_{\hat{g}} = \Delta_{\hat{f}}$.
   (b) $g(x) = f(\lambda x)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$;
   Solution : dans ce cas, on a $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\lambda}\hat{f}(\xi/\lambda)$ et
   $$\bar{x}_g = \frac{1}{\lambda}\bar{x}_f, \;\; \bar{\xi}_g = \lambda\bar{\xi}_f, \;\; \Delta_g = \frac{1}{|\lambda|}\Delta_f, \;\; \Delta_{\hat{g}} = |\lambda|\Delta_{\hat{f}}, \;\text{ et donc }\; \Delta_g\Delta_{\hat{g}} = \Delta_f\Delta_{\hat{f}}.$$
   (c) $g(x) = \tau_h f$, avec $h \in \mathbb{R}^*$;
   Solution : la translation affecte seulement la position de sorte que
   $$\bar{x}_g = \bar{x}_f + h, \;\; \bar{\xi}_g = \bar{\xi}_f, \;\text{ et }\; \Delta_g\Delta_{\hat{g}} = \Delta_f\Delta_{\hat{f}}.$$
   (d) $g(x) = e^{i\phi x}f(x)$, avec $\phi \in \mathbb{R}$.
   Solution : cette fois, le changement de phase n'affecte que la vitesse :
   $$\bar{x}_g = \bar{x}_f, \;\; \bar{\xi}_g = \bar{\xi}_f + \phi, \;\text{ et }\; \Delta_g\Delta_{\hat{g}} = \Delta_f\Delta_{\hat{f}}.$$
2. Montrer que pour obtenir l'inégalité (4), il suffit de montrer que pour toute fonction f satisfaisant aux hypothèses, on a :
   $$||xf||_2^2||\xi\hat{f}||_2^2 \geq \frac{1}{4}||f||_2^2||\hat{f}||_2^2. \tag{5}$$
   Solution : d'après la question précédente, si $g = e^{-i\bar{\xi}_f x}f(x+\bar{x}_f)$, alors $\bar{x}_g = 0$ et $\bar{\xi}_g = 0$ de sorte que
   $$\frac{||xg||_2^2||\xi\hat{g}||_2^2}{||g||_2^2||\hat{g}||_2^2} = \Delta_g\Delta_{\widehat{g}} = \Delta_f\Delta_{\widehat{f}}.$$
   Pour obtenir l'inégalité désirée pour f, il suffit donc de l'avoir pour g et donc il suffit de prouver que pour toute fonction f satisfaisant les hypothèses du théorème la minoration (5).

3. En intégrant par parties, montrer que l'inégalité (5) est vraie pour toute fonction f de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$.
Solution : soit $f \in \mathcal{S}$, en intégrant par parties puis en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$||f||_2^2 = \int f(x)\bar{f}(x)dx = -2\Re\left(\int xf(x)\partial_x\bar{f}(x)dx\right) \leq 2||xf||_2||\partial_x\bar{f}||_2. \tag{6}$$

La transformée de Fourier étant une isométrie (identité de Parseval), on a

$$||\hat{f}||_2^2 = 2\pi||f||_2^2.$$

Par ailleurs, étant donnée la dualité dérivation/multiplication en Fourier, on a

$$2\pi||\partial_x\bar{f}||_2^2 = ||\xi\hat{f}||_2^2.$$

Au final, en élevant au carré l'inégalité (6), il vient

$$||f||_2^2||\hat{f}||_2^2 = 2\pi||f||_2^4 \leq 2\pi \times 4||xf||_2^2||\partial_x\bar{f}||_2^2 = 4||xf||_2^2||\xi\hat{f}||_2^2,$$

d'où le résultat. Le cas d'égalité dans l'inégalité ci-dessus correspond au cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, i.e. au cas où les termes auxquels on applique l'inégalité sont proportionnels. S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\partial_x f = \lambda xf$, alors $f = cste\ e^{\lambda x^2/2}$ i.e. f est la densité d'une variable gaussienne.

Le cas général où $f \in \mathbb{L}^2$ peut être obtenu en décomposant f sur une base hilbertienne bien choisie, par exemple la base des polynômes d'Hermite (voir exercice **??**).

Exercice 4 *Une inégalité d'incertitude récente (J. Bourgain, 2007)*
Dans cet exercice, on définit la transformée de Fourier via la formule :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{2\pi i x\xi}dx.$$

1. Réécrire la transformée de Fourier d'une gaussienne et la formule d'inversion avec cette convention.
Solution : Avec cette convention, la transformée de Fourier de la gaussienne $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ est $\hat{g}(\xi) = \sqrt{2\pi\sigma^2}e^{-2\pi^2\sigma^2\xi^2}$, on particulier lorsque $2\pi\sigma^2 = 1$, la gaussienne est un point fixe de la transformée de Fourier : $g(x) = e^{-\pi x^2}$, $\hat{g}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$. La formule d'inversion devient $f(x) = \hat{\hat{f}}(-x)$.

Soient f et $\hat{f}$ deux fonctions dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ telles que

a. $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f,	*c.* $f(x) \geq 0$ pour $\lvert x\rvert \geq a > 0$ et $f(0) \leq 0$,
b. f et $\hat{f}$ sont paires et réelles,	*d.* $\hat{f}(\xi) \geq 0$ pour $\lvert\xi\rvert \geq \hat{a} > 0$ et $\hat{f}(0) \leq 0$.

Il s'agit de montrer que dans ces conditions, le produit $a\hat{a}$ est minoré par une constante absolue strictement positive.

2. Pourquoi la condition *b.* est-elle contenue dans les conditions *c.* et *d.* ?
Solution : La condition *b.* est contenue dans les conditions *c.* et *d.* car *c.* implique que f est réelle et donc $\hat{f}$ est paire ; la condition *d.* implique que $\hat{f}$ est réelle, ce qui entraîne que f est paire.

3. Montrer que l'on peut supposer que $a = \hat{a}$ et que l'on peut se limiter aux fonction f qui sont égales à leur transformées de Fourier.
   Solution : soient $\lambda > 0$ et $f_\lambda(x) := f(\lambda x)$ un changement d'échelle. Les fonctions f_λ et $\hat{f}_\lambda$ vérifient $f_\lambda \geq 0$ et $\hat{f}_\lambda \geq 0$ sur les ensembles $x \geq a/\lambda$ et $\xi \geq \lambda \hat{a}$ respectivement. On peut donc effectuer un changement d'échelle sans changer le produit $a\hat{a}$. Considérons la fonction $g := f + \hat{f}$. Par parité et d'après le théorème d'inversion, on a $\hat{g} = g$. Par ailleurs, on a $g(0) \leq 0$ et $g(x) \geq 0$ si $|x| \geq a = \hat{a}$. On peut donc sans perdre en généralité supposer que $f = \hat{f}$
4. Montrer que l'on peut supposer que $||f||_{\mathbb{L}^1} = 1$ et $f(0) = 0$.
   Solution On vérifie sans difficulté que la fonction $g(x) = f(x) - f(0)e^{-\pi x^2}$ vérifie les mêmes hypothèses que f avec en bonus $g(0) = 0$. Par ailleurs, la normalisation pour la norme $\mathbb{L}^1$ n'a pas d'influence sur le seuil a.
5. Sous ces conditions, que vaut $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$? Montrer qu'alors $\int f^+ = \int f^- = 1/2$.
   Solution : on a d'une part
   $$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \hat{f}(0) = f(0) = 0.$$
   Comme $f = f^+ - f^-$, on en déduit que
   $$\int_{\mathbb{R}} f^+(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f^-(x)dx.$$
   Par ailleurs, comme f est normalisée en norme $\mathbb{L}^1$ (Cf. question précédente), on a
   $$1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} f^+(x)dx + \int_{\mathbb{R}} f^-(x)dx,$$
   et on en déduit naturellement :
   $$\int_{\mathbb{R}} f^+(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f^-(x)dx = \frac{1}{2}.$$
6. En déduire que $\int_{|x|>a} |f| \leq 1/2$ et $\int_{|x|<a} |f| \geq 1/2$.
   Solution : par définition de la fonction f :
   $$\int_{|x|>a} |f(x)|dx = \int_{|x|>a} f^+(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}} f^+(x)dx = \frac{1}{2}.$$
   Comme $||f||_1 = 1$, il en découle que $\int_{|x|<a} |f| \geq 1/2$.
7. Montrer que $\sup |f| \leq 1$, en déduire une minoration de a et conclure.
   Solution : par le théorème d'inversion, on a
   $$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-2i\pi x\xi} d\xi,$$
   et en majorant brutalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$|f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|d\xi \stackrel{ici}{=} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx = 1$$
   donc
   $$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \leq 1.$$

De l'inégalité $\int_{|x|<a} |f| \geq 1/2$, on déduit alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \int_{|x|<a} 1dx \geq \int_{|x|<a} |f(x)|dx \geq \frac{1}{2}$$

et donc $2a \geq 1/2$ puis $a^2 = a\hat{a} \geq 1/16$.

8. On peut poser le même problème dans $\mathbb{R}^n$. Établir une minoration de a dépendant de n en suivant la même méthode.
   Solution : de la même façon, si $\mathrm{vol}(B_n)$ désigne le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$, on montre que
   $$\mathrm{vol}(B_n)a^n \geq \frac{1}{2}.$$

La transformée de Laplace d'une mesure

Pour des rappels de base concernant la notion de transformée de Laplace, on pourra se référer par exemple à [DCD82]. Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne. On lui associe sa transformée de Laplace L_μ à valeurs dans $[0, +\infty]$, définie pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$L(t) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{tx}\, \mu(dx).$$

Naturellement, on s'intéressera essentiellement au réels t tels que $L_\mu(t)$ est finie.

Exercice 5 *Transformées de Laplace usuelles*
Des calculs directs permettent d'établir l'expression des transformées de Laplace $L_\mu(t)$ des mesures suivantes :

1. la mesure gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$ de densité
   $$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$
   Solution : Le calcul direct donne
   $$\int e^{tx} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{t^2/2} \int e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{t^2/2}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$
   À retenir : loi gaussienne est un point fixe de la transformée de Fourier, on déduit l'expression de la transformée de Laplace par changement de variable $x \leftrightarrow ix$.
2. la mesure gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ de densité
   $$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right),$$
   Solution : le calcul direct donne
   $$\int e^{tx} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = e^{\sigma^2 t^2/2+mt} \int e^{-\frac{(x-m-\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = e^{\sigma^2 t^2/2+mt}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$
   Variante : on peut partir de l'expression précédente puis recentrer et normaliser.

3. la mesure exponentielle de densité
$$x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\{x>0\}},$$
Solution : la transformée est finie si et seulement si $t<\lambda$ et une intégration directe donne :
$$\int_0^{+\infty} e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-t)x}dx = \frac{\lambda}{\lambda-t}.$$
4. la mesure de Cauchy de densité
$$x \mapsto \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2},$$
Solution : la loi de Cauchy n'admet pas de moment d'ordre 1, et a fortiori pas de moment exponentiel, i.e. la transformée de Laplace est finie en $t=0$ où elle vaut naturellement 1, et elle est infinie ailleurs.
5. la mesure de Poisson
$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\delta_k,$$
Solution : Un calcul direct donne :
$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{(e^t\lambda)^k}{k!} = e^{\lambda(e^t-1)}.$$
6. la mesure binomiale
$$\mu = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\delta_k.$$
Solution : enfin, par la formule du binôme, on a
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^tp)^k(1-p)^{n-k} = (1-p+pe^t)^n.$$

Exercice 6 *Quelques propriétés de la transformée de Laplace*
Voici quelques propriétés classiques de la transformée de Laplace L.

1. Montrer que L est convexe. Que dire de son domaine de définition ?
Solution : c'est une conséquence immédiate d ela convexité de la fonction exponentielle. L'ensemble de définition de la transformée est un convexe contenant l'origine.
2. Quel lien existe-t-il entre la régularité de L en 0 et les propriétés de μ ?
Solution : en développant l'exponentielle en série, on constante que la régularité de la transformée en l'origine est reliée aux moments de μ.
3. Montrer que L est log-convexe (*i.e.* $\log L$ est une fonction convexe).
Il s'agit d'une conséquence immédiate de l'inégalité de Hölder
4. Que dire de la transformée de Laplace de $\mu * \nu$?
Solution : c'est le produit des transformées de Laplace de μ et ν.

Exercice 7 *Inégalité de Chernov*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires centrées, indépendantes et identiquement distribuées de loi μ et de transformée de Laplace L définie sur intervalle d'intérieur non vide.

1. Montrer que, pour tout $r \geq 0$,
$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq r\right) \leq \exp\left(-n \sup_{\lambda>0}(r\lambda - L(\lambda))\right).$$
Solution : pour $\lambda > 0$, on écrit
$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq r\right) = \mathbb{P}(e^{\lambda \sum X_i} \geq e^{\lambda n r}),$$
puis on applique l'inégalité de Markov :
$$\mathbb{P}(e^{\lambda \sum X_i} \geq e^{\lambda n r}) \leq e^{-\lambda n r}\mathbb{E}[e^{\lambda \sum X_i}] = e^{-\lambda n r}\mathbb{E}[e^{\lambda X_i}]^n.$$
Il ne reste alors plus quà optimiser en λ.
2. Que donne cette majoration pour la mesure gaussienne ? la mesure exponentielle ? la loi de Poisson ?
Solution : on trouve les extrema en dérivant par rapport à λ.

Autour du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck

Tout ce qui concerne le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck se trouve dans les dix premières pages de [Bak94]. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ à dérivées à croissance lente. Une fonction f est dite à croissance lente s'il existe un polynôme P tel que $|f| \leq P$. Dans toute la section, les fonctions considérées seront supposées appartenir à l'ensemble $\mathcal{A}$.

Définition 1 *Le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}$ est la famille $(N_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs agissant sur les fonctions f de $\mathcal{A}$ par :*
$$N_t(f)(x) \overset{déf.}{=} \int_{\mathbb{R}} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\gamma(dy),$$
où γ désigne la mesure gaussienne standard sur $\mathbb{R}$:
$$\gamma(dy) = e^{-y^2/2}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}.$$
Pour simplifier les expressions, on pourra poser
$$c_t \overset{déf.}{=} e^{-t} \quad \text{et} \quad d_t \overset{déf.}{=} \sqrt{1-e^{-2t}}.$$

Exercice 8 *Propriété de semi-groupe et générateur infinitésimal*
Montrer que la famille $(N_t)_{t\geq 0}$ vérifie les propriétés suivantes :

1. pour tout $t \geq 0$ et toute fonction $f \in \mathcal{A}$, $N_t(f) \in \mathcal{A}$,
Solution : Comme f est à croissance lente, on a
$$\begin{aligned} |N_t(f)(x)| &\leq \int |f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)|\gamma(dy) \leq \int P(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\gamma(dy) \\ &\leq \int \left(\sum_{k=0}^{N} a_k(y,t)x^k\right)\gamma(dy) = \sum_{k=0}^{N} b_k(t)x^k. \end{aligned}$$
Dans l'expression ci-dessus, les fonctions a_k sont polynomiales en la variable y, et les fonctions b_k sont obtenues par intégration des a_k contre la mesure gaussienne. Le raisonnement est le même pour les dérivées de f.

2. pour tout $t \geq 0$, $N_t \mathbf{1}(x) = 1$,
   Solution : c'est clair si l'on se rappelle que
$$N_t f(x) = \mathbb{E}\left[f\left(e^t x + \sqrt{1-e^{-2t}} Y \right) \right], \quad \text{où} \quad Y \sim \mathcal{N}(0,1).$$
3. pour tous $t \geq 0$ et $f \in \mathcal{A}$, $f \geq 0$ entraîne $N_t f \geq 0$,
   Solution : idem.
4. pour toute fonction $f \in \mathcal{A}$, $N_0 f = f$,
   Solution : trivial, faire $t = 0$ dans l'expression.
5. pour tous $s, t \geq 0$ et $f \in \mathcal{A}$, $N_t N_s f(x) = N_{t+s} f(x)$.
   Solution : le calcul direct peut être fastidieux. Une façon élégante de procéder consiste à remarquer que
$$N_t N_s f(x) = \mathbb{E}\left[f\left(e^t \left(e^s x + \sqrt{1-e^{-2s}} Z \right) + \sqrt{1-e^{-2t}} Y \right) \right],$$
   où les variables Y et Z sont des gaussiennes centrées réduites indépendantes, de sorte que
$$e^t \sqrt{1-e^{-2s}} Z + \sqrt{1-e^{-2t}} Y \sim \mathcal{N}(0, 1-e^{-2(t+s)}),$$
   i.e.
$$N_t N_s f(x) = \mathbb{E}[f(e^{t+s} x + \sqrt{1-e^{-2(t+s)}} Y] = N_{t+s} f(x).$$
6. Montrer que
$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (N_t f - f)(x) = f''(x) - x f'(x).$$
   Solution : il s'agit naturellement de faire un développement limité au voisinage de x i.e. au voisinage de $t = 0$. On écrit
$$f(e^{-t} x + \sqrt{1-e^{-2t}} y) = f(x + (e^{-t}-1)x + \sqrt{1-e^{-2t}} y) = f(x - (t+o(t))x + (\sqrt{2t} + o(\sqrt{2t}))y),$$
   les infinitésimaux étant uniformes en x et y. Par la formule de Taylor, on a alors
$$f(e^{-t} x + \sqrt{1-e^{-2t}} y) \approx f(x) - t x f'(x) + \sqrt{2t} y f'(x) + t y^2 f''(x) + o(t).$$
   Comme f et ses dérivées sont à croissance lente, le petit o ci-dessus, vu comme fonction de x et y peut être majoré par une fonction polynomiale en x et y. On peut donc passer à la limite $t \to 0$ sous l'intégrale, et comme $\int y \gamma(dy) = 0$ et $\int y^2 \gamma(dy) = 1$, il vient naturellement
$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (N_t f - f)(x) = f''(x) - x f'(x),$$
   L'opérateur A défini sur $\mathcal{A}$ par
$$Af(x) := f''(x) - x f'(x)$$
   sera appelé générateur infinitésimal du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck.
7. Montrer que
$$\partial_t N_t f = A(N_t f) = N_t(Af).$$
   Solution : la relation est vraie en $t = 0$ d'après la question précédente, par la propriété de semi-groupe, elle s'étend à tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Jürgen Angst
Page web : `http://perso.univ-rennes1.fr/jurgen.angst/`
Courriel : `jurgen.angst@univ-rennes1.fr`

Références

[Bak94] D. Bakry – « L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes », Lectures on probability theory (Saint-Flour, 1992), Lecture Notes in Math., vol. 1581, Springer, Berlin, 1994, p. 1–114.

[DCD82] D. Dacunha-Castelle et M. Duflo – *Probabilités et statistiques. Tome 1*, Masson, Paris, 1982, Problèmes à temps fixe.

[Laa01] E. Laamri – *Mesures, intégration, convolution, et transformée de Fourier des fonctions*, Dunod, 2001.

[Rud95] W. Rudin – *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1995.