

## QUELQUES RAPPELS SUR LES MARTINGALES 2

### 1 Convergence presque sûre

On commence par introduire quelques notations. Soient  $x = (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite réelle, et  $a < b \in \mathbb{Q}$ . On définit par récurrence

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \inf\{n \geq 0, x_n \leq a\}, \\ T_1(x) &= \inf\{n \geq S_1, x_n \geq b\}, \\ S_{k+1}(x) &= \inf\{n \geq T_k, x_n \leq a\}, \\ T_{k+1}(x) &= \inf\{n \geq S_k, x_n \geq b\}. \end{aligned}$$

On définit alors les nombres de montées entre  $a$  et  $b$  par

$$N_n([a, b], x) := \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{T_k \leq n}, \quad N_\infty([a, b], x) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{T_k < \infty} = \sup\{k, T_k < \infty\}.$$

**Lemme 1.** *La suite  $x = (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  converge dans  $\overline{\mathbb{R}}$  si et seulement si pour tout  $a, b$ ,  $N_\infty([a, b], x) < \infty$ .*

*Démonstration.*  $x$  diverge ssi  $\liminf x_n < \limsup x_n$  ssi il existe  $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$  tel que  $\liminf x_n \leq a < b \leq \limsup x_n$  ssi il existe  $a, b \in \mathbb{Q}$  tel que  $N_\infty([a, b], x) = \infty$ .  $\square$

**Remarque 1.** *Si  $(X_n)$  est une suite adaptée, en particulier si  $(X_n)$  est une (sur/sous)-martingale, alors les temps  $T_k(X)$  et  $S_k(X)$  sont des temps d'arrêt pour la filtration naturelle associée.*

#### 1.1 Le cas des martingale positives

**Proposition 1.** *Soient  $(X_n)_n$  une martingale positive et  $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ . Alors, on a l'inégalité*

$$\mathbb{P}(N_\infty([a, b], X) \geq k) \leq \left(\frac{a}{b}\right)^k.$$

*En particulier,  $N_\infty([a, b], X)$  est fini p.s.*

*Démonstration.* On remarque que  $\{N_\infty([a, b], X) \geq k\} = \{T_k < \infty\}$ . Ensuite, comme  $\{S_k < \infty\} \subset \{T_{k-1} < \infty\}$ , pour établir l'inégalité recherchée, il suffit de montrer que

$$\mathbb{P}(T_k < \infty) \leq \frac{a}{b} \mathbb{P}(S_k < \infty).$$

Les variables  $T_k \wedge n$  et  $S_k \wedge n$  sont des temps d'arrêt bornés donc par le théorème d'arrêt,  $\mathbb{E}(X_{T_k \wedge n}) = \mathbb{E}(X_{S_k \wedge n}) = \mathbb{E}(X_0)$ . Ainsi, on a

$$\mathbb{E}(X_{T_k} \mathbb{1}_{T_k \leq n}) + \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{T_k > n}) = \mathbb{E}(X_{S_k} \mathbb{1}_{S_k \leq n}) + \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{S_k > n}),$$

ou encore

$$\mathbb{E}(X_{T_k} \mathbb{1}_{T_k \leq n}) + \underbrace{\mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{T_k > n \geq S_k})}_{\geq 0} = \mathbb{E}(X_{S_k} \mathbb{1}_{S_k \leq n}),$$

et comme  $(X_n)$  est positive

$$\mathbb{E}(X_{T_k} \mathbb{1}_{T_k \leq n}) \leq \mathbb{E}(X_{S_k} \mathbb{1}_{S_k \leq n}).$$

Par définition de  $T_k$  et  $S_k$ , on a  $X_{T_k} \geq b$  et  $X_{S_k} \leq a$  presque sûrement, ainsi pour tout  $n$

$$b \times \mathbb{P}(T_k \leq n) \leq \mathbb{E}(X_{T_k} \mathbb{1}_{T_k \leq n}) \leq \mathbb{E}(X_{S_k} \mathbb{1}_{S_k \leq n}) \leq a \times \mathbb{P}(S_k \leq n),$$

autrement dit

$$\mathbb{P}(T_k \leq n) \leq \frac{a}{b} \mathbb{P}(S_k \leq n),$$

et en faisant tendre  $n$  vers l'infini, on a bien

$$\mathbb{P}(T_k < \infty) \leq \frac{a}{b} \mathbb{P}(S_k < \infty) \leq \frac{a}{b} \mathbb{P}(T_{k-1} < \infty) \leq \dots \leq \left(\frac{a}{b}\right)^k.$$

En particulier,  $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_k < +\infty) < \infty$  donc par le lemme de Borel–Cantelli,

$$\mathbb{P}(T_k < \infty \text{ infiniment souvent}) = 0,$$

i.e.  $X$  ne traverse plus  $[a, b]$  à partir d'un certain rang. □

**Remarque 2.** Dans la preuve ci-dessus, on a uniquement utilisé ici la positivité de la suite  $(X_n)$  et le théorème d'arrêt. La preuve s'adapte verbatim si au lieu de l'égalité de départ  $\mathbb{E}(X_{T_k \wedge n}) = \mathbb{E}(X_{S_k \wedge n})$ , on a l'inégalité  $\mathbb{E}(X_{T_k \wedge n}) \leq \mathbb{E}(X_{S_k \wedge n})$ , autrement dit si  $(X_n)$  est une sur-martingale.

**Corollaire 1.** Soit  $(X_n)_n$  une (sur)-martingale positive. Alors la suite  $X_n$  converge p.s. vers une variable (positive)  $X_\infty$  intégrable.

*Démonstration.* La convergence découle de la proposition et du lemme précédents. La limite  $X_\infty$  est naturellement positive car les  $X_n$  le sont. Dans le cas d'une martingale, par le lemme de Fatou, on a

$$\mathbb{E}(X_\infty) \leq \liminf \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0) < \infty.$$

Dans le cas d'une sur-martingale, l'inégalité  $\mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X_0)$  associé au lemme de Fatou permettent de conclure. □

**Exercice 1. Retour sur la marche simple**

On considère une marche simple  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  avec  $X_i \sim B(\pm 1, p)$  i.i.d.

1. Déterminer la limite de  $Y_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}$  lorsque  $p \neq 1/2$ .
2. Déterminer la limite de  $Z_n = \exp(\lambda S_n) / \cosh(\lambda)^n$  lorsque  $p = 1/2$ .

**Exercice 2. Martingale exponentielle discrète**

On considère une marche simple  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  avec  $X_i$  i.i.d.. On suppose qu'il existe  $\lambda > 0$  tel que  $\phi(\lambda) := \mathbb{E}[e^{\lambda X_1}] < +\infty$ . Montrer que la suite

$$\mathcal{E}(S_n) := \exp(\lambda S_n - n \log \phi(\lambda))$$

est une martingale qui converge presque sûrement.

**Exercice 3. Modèle de Wright-Fisher**

Soient  $k$  et  $N$  deux entiers tels que  $0 < k < N$ . On définit par récurrence une suite de variables  $(X_n^N)_{n \geq 0}$  de la façon suivante :  $X_0^N := k$  et pour tout  $n \geq 0$  et  $i \in \{0, \dots, N\}$ , la loi de  $X_{n+1}^N$  sachant que  $X_n^N = i$  est la loi binomiale  $\mathcal{B}(N, i/N)$ .

1. Montrer que la suite  $(X_n^N)_{n \geq 0}$  est une martingale.
2. Montrer que lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $(X_n^N)_{n \geq 0}$  converge presque sûrement et dans  $\mathbb{L}^p$  pour tout  $p \geq 1$ .
3. Décrire la loi de la variable limite  $X_\infty^N$ .

**Exercice 4. : Martingales pour l'urne de Polya à deux couleurs**

On considère une urne dans laquelle se trouvent initialement deux boules, une blanche et une noire. On dispose par ailleurs d'un stock infini de boules noires et blanches. Partant de la configuration initiale, à chaque pas de temps, on tire au hasard une boule de l'urne et on la remet dans l'urne avec une boule de même couleur issue du stock. À l'instant  $n$ , il y a ainsi  $n + 2$  boules dans l'urne. On note  $N_n$  le nombre de boules noires dans l'urne à l'instant  $n$  et  $X_n := N_n / (n + 2)$  la proportion de boules noires.

1. Montrer que la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une martingale bornée. En déduire  $X_n$  converge (en quel sens ?) vers une variable  $X_\infty$  telle que  $0 \leq X_\infty \leq 1$ .
2. Pour  $k \geq 1$ , on considère la nouvelle suite  $(Z_n^{(k)})_{n \geq 0}$  de variables aléatoires :

$$Z_n^{(k)} := \frac{N_n(1 + N_n) \dots (k - 1 + N_n)}{(1 + n) \dots (k + n)}.$$

Montrer que  $(Z_n^{(k)})_{n \geq 0}$  est également une martingale bornée qui converge (en quel sens ?) vers  $Z_\infty^{(k)} = X_\infty^k$  (la puissance  $k$ -ième de  $X_\infty$ ) et que  $\mathbb{E}[Z_\infty^{(k)}] = 1/(k + 1)$ .

3. En déduire que la loi de  $Z_\infty$  est la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

## 1.2 Cas des martingales bornées dans $\mathbb{L}^1$

On généralise à présent les résultats précédents au cas des martingales non nécessairement positives. Le lemme clef est le suivant.

**Lemme 2** (des montées de Doob). *Soit  $(X_n)_n$  une sous-martingale et  $a < b \in \mathbb{Q}$ . Pour tout  $n \geq 0$ , on a*

$$(b - a)\mathbb{E}(N_n([a, b], X)) \leq \mathbb{E}((X_n - a)^+ - (X_0 - a)^+).$$

*Démonstration.* Considérons la suite  $Y_n := (X_n - a)^+$ . C'est l'image de  $X_n$  par l'application convexe  $x \mapsto (x - a)^+$ , c'est donc une sous-martingale (positive). Introduisons alors l'indicatrice

$$H_n := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{S_k < n \leq T_k} \in \{0, 1\}$$

qui vaut 1 si et seulement si l'indice  $n$  correspond à une montée entre  $a$  et  $b$  de la suite initiale  $(X_n)$ . C'est une suite prévisible car pour tout indice  $k$ ,  $S_k$  et  $T_k$  sont des temps d'arrêt et donc

$$\{S_k < n \leq T_k\} = \{S_k \leq n - 1\} \setminus \{T_k \leq n - 1\} \in \mathcal{F}_{n-1}.$$

On peut alors écrire

$$Y_n - Y_0 = (H \cdot Y)_n + ((1 - H) \cdot Y)_n.$$

Comme  $((1 - H) \cdot Y)$  est une sous-martingale, on a  $\mathbb{E}[((1 - H) \cdot Y)_n] \geq \mathbb{E}[((1 - H) \cdot Y)_0] = 0$ , en particulier, pour établir le lemme, il suffit de montrer l'inégalité

$$\mathbb{E}[(H \cdot Y)_n] \geq (b - a) \times \mathbb{E}(N_n([a, b], X)). \quad (\star)$$

On remarque alors que

$$(H \cdot Y)_n = \sum_{k=1}^{N_n} (Y_{T_k} - Y_{S_k}) + \underbrace{\mathbb{1}_{S_{N_n+1} < n} (Y_n - Y_{S_{N_n+1}})}_{\geq 0},$$

puisque sur l'événement  $\{S_{N_n+1} < n\}$  on a  $Y_{S_{N_n+1}} = 0$  donc  $Y_n \geq 0$ . On a donc presque sûrement

$$(H \cdot Y)_n \geq \sum_{i=1}^{N_n} (Y_{T_k} - Y_{S_k}) \geq (b - a) \times N_n([a, b], X),$$

et en prenant l'espérance, on déduit  $(\star)$ , d'où le résultat.  $\square$

**Remarque 3.** *Si  $(X_n)$  est une sur-martingale, on a un résultat similaire, précisément*

$$(b - a) \times \mathbb{E}(N_n([a, b], X)) \leq \mathbb{E}[(X_n - a)^-].$$

**Théorème 1.** *Soit  $(X_n)_n$  une sous-martingale telle que  $\sup_n \mathbb{E}((X_n)^+) < \infty$  ie  $(X_n)_n$  est bornée dans  $\mathbb{L}^1$ . Alors  $(X_n)$  converge p.s. vers une variable  $X_\infty \in \mathbb{L}^1$ .*

*Démonstration.* Soient  $a < b \in \mathbb{Q}$ , on a alors

$$(b - a)\mathbb{E}(N_n([a, b], X)) \leq \mathbb{E}((X_n - a)^+) \leq |a| + \mathbb{E}((X_n)^+) \leq |a| + \sup_n \mathbb{E}((X_n)^+).$$

Quand  $n \rightarrow +\infty$ , on trouve  $(b - a)\mathbb{E}(N_\infty([a, b], X)) < \infty$ . En particulier,  $N_\infty([a, b], X)$  est fini p.s. On peut permuter p.s. et  $\forall a, b \in \mathbb{Q}$  donc p.s.,  $\forall a < b \in \mathbb{Q}$ ,  $N_\infty([a, b], X) < \infty$ , autrement dit  $X_n$  converge p.s. De plus, par le lemme de Fatou,  $\mathbb{E}(|X_\infty|) \leq \liminf \mathbb{E}(|X_n|) \leq \sup_n \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$ .  $\square$

**Remarque 4.** Dans l'énoncé précédent, on a utilisé que le fait suivant

$$\sup_n \mathbb{E}(X_n^+) < \infty \iff \sup_n \mathbb{E}(|X_n|) < \infty.$$

*Montrons-le : on a*

$$E(X_0) \leq \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^+) - E(X_n^-),$$

donc  $E(X_n^-) \leq \mathbb{E}(X_n^+) - \mathbb{E}(X_0)$  et

$$\sup_n \mathbb{E}(X_n^-) \leq \sup_n \mathbb{E}(X_n^+) - \mathbb{E}(X_0).$$

**Corollaire 2.** Si  $X$  est une sur-martingale positive, alors elle converge p.s. et sa limite est  $\mathbb{L}^1$ . De plus,  $\mathbb{E}(X_\infty | F_n) \leq X_n$  p.s.

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le théorème précédente à  $-X_n$ .  $\square$

**Exercice 5.** Retour sur la marche simple

Soit  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  avec  $X_i \sim B(\pm 1, \frac{1}{2})$  i.i.d avec  $S_0 = 1$ . Soit  $T = \inf\{n, S_n = 0\}$ . Montrer que la suite  $(S_{T \wedge n})_n$  est converge presque sûrement mais pas dans  $\mathbb{L}^1$ .

**Exercice 6.** Concentration sur 0 et 1

Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires réelles. On pose  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ ,  $n \geq 0$ . On suppose que  $X_0 = a$  presque sûrement avec  $a \in [0, 1]$  et que pour  $n \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \mid \mathcal{F}_n\right) = 1 - X_n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{1 + X_n}{2} \mid \mathcal{F}_n\right) = X_n.$$

1. Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une martingale qui converge presque sûrement et dans  $\mathbb{L}^p$  pour tout  $p \geq 1$  vers une variable aléatoire que l'on note  $X_\infty$ .
2. Montrer que, pour tout  $n \geq 0$  :

$$\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2] = \frac{1}{4}\mathbb{E}[X_n(1 - X_n)].$$

3. En déduire la valeur de  $\mathbb{E}[X_\infty(1 - X_\infty)]$  puis la loi de  $X_\infty$ .

## 2 Convergence dans $\mathbb{L}^1$ des martingales

### 2.1 Martingales fermées

**Théorème 2.** Soit  $(X_n)_n$  une martingale. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $X$  converge p.s. dans  $\mathbb{L}^1$  vers  $X_\infty \in \mathbb{L}^1$
- (ii) il existe  $Z \in \mathbb{L}^1$  tel que  $X_n = \mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_n)$

Si c'est le cas, on a  $X_\infty = \mathbb{E}[Z | \mathcal{F}_\infty]$  où  $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_n \mathcal{F}_n)$ .

*Démonstration.*

- (i)  $\Rightarrow$  (ii) On sait que pour tout  $m > n$ ,  $\mathbb{E}(X_m | \mathcal{F}_n) = X_n$  p.s.  
Par ailleurs,  $Y \mapsto \mathbb{E}(Y | \mathcal{F}_n)$  est une contraction de  $\mathbb{L}^1$  donc quand  $m \rightarrow +\infty$ , on a  $\mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_n) = X_n$  p.s.
- (ii)  $\Rightarrow$  (i) S'il existe  $Z \in \mathbb{L}^1$  tel que  $X_n = \mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_n)$  alors  $(X_n)_n$  est bornée dans  $\mathbb{L}^1$  puisque  $\sup \mathbb{E}(|X_n|) \leq \mathbb{E}(|Z|)$ . D'après le cours,  $X_n$  converge p.s. vers  $X_\infty \in \mathbb{L}^1$ . Si  $Z$  est bornée, la convergence  $\mathbb{L}^1$  découle du théorème de convergence dominée.  
Sinon, soit  $\varepsilon > 0$  et  $M$  assez grand pour que  $\mathbb{E}(|Z - Z\mathbb{1}_{|Z| \leq M}|) \leq \varepsilon$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_n - \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{|Z| \leq M} | \mathcal{F}_n)|) &= \mathbb{E}(|\mathbb{E}(Z - Z\mathbb{1}_{|Z| \leq M} | \mathcal{F}_n)|) \\ &\leq \mathbb{E}(|Z - Z\mathbb{1}_{|Z| \leq M}|) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

D'après le cas borné,  $\mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{|Z| \leq M} | \mathcal{F}_n)$  converge dans  $\mathbb{L}^1$  donc pour tout  $m, n$  assez grands,

$$\mathbb{E}(|\mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{|Z| \leq M} | \mathcal{F}_m) - \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{|Z| \leq M} | \mathcal{F}_n)|) \leq \varepsilon$$

En combinant ces deux résultats, on trouve pour tout couple d'entiers  $m, n$  assez grands,  $\mathbb{E}(|X_m - X_n|) \leq 3\varepsilon$ , donc  $(X_n)$  est de Cauchy dans  $\mathbb{L}^1$ .  $\square$

**Corollaire 3.** Soit  $Z \in \mathbb{L}^1$  et  $X_n = \mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_n)$ . Alors  $(X_n)_n$  converge p.s. et dans  $\mathbb{L}^1$ . De plus,  $X_\infty = \mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_\infty)$  où  $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n\right)$ .

*Démonstration.*  $X_\infty$  est  $\mathcal{F}_\infty$ -mesurable. En effet, pour tout  $n$ ,  $X_n$  est  $\mathcal{F}_\infty$ -mesurable donc  $X_\infty$  aussi. Si  $A \in \mathcal{F}_n$ ,  $\mathbb{E}(Z\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X_\infty\mathbb{1}_A)$ . Par classe monotone, on déduit que pour tout  $A \in \mathcal{F}_\infty$ ,  $\mathbb{E}(Z\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X_\infty\mathbb{1}_A)$ .  $\square$

**Théorème 3.** Soit  $(X_n)_n$  une martingale. Il y a équivalence entre

1.  $X$  converge p.s. et dans  $\mathbb{L}^1$  vers une limite  $\mathbb{L}^1$
2.  $X$  est fermée
3.  $X$  est uniformément intégrable

**Exercice 7. Fonctions intégrables et fonctions étagées**

Soit  $f$  une fonction mesurable et intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue  $\lambda$  sur  $[0, 1]$ . On souhaite retrouver le résultat suivant : il existe une suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  de fonctions étagées qui converge presque sûrement et dans  $\mathbb{L}^1([0, 1], d\lambda)$  vers  $f$ . Soient  $X$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $[0, 1]$  et pour tout entier naturel  $n$  :  $X_n := 2^{-n} \lfloor 2^n X \rfloor$ . On pose  $Y := f(X)$  et  $Y_n := \mathbb{E}[Y | \mathcal{F}_n]$  où  $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$ .

1. Montrer que  $X_n$  converge vers  $X$ . Quelle signification donner à  $2^n(X_n - X_{n-1})$  ?
2. Montrer que  $Y_n$  converge presque sûrement et dans  $\mathbb{L}^1$ . Identifier sa limite.
3. Expliciter  $Y_n$  et conclure.

**Exercice 8. Dérivée de Radon-Nikodým d'une fonction lipschitzienne** Soit  $f$  une fonction lipschitzienne sur  $[0, 1]$ , i.e. il existe  $C > 0$  telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|, \quad \text{pour tout } x, y \in [0, 1].$$

On veut montrer qu'il existe une fonction mesurable bornée  $g$  telle que :

$$f(y) - f(x) = \int_x^y g(z) dz, \quad \text{pour tout } x, y \in [0, 1].$$

Comme précédemment, soient  $X$  une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ ,  $X_n := 2^{-n} \lfloor 2^n X \rfloor$  et  $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$ . On pose  $Z_n := 2^n (f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n))$ .

1. Montrer que  $Z_n$  converge presque sûrement et dans  $\mathbb{L}^1$  vers une variable  $Z_\infty$ .
2. Montrer que  $Z_\infty$  est  $\sigma(X)$ -mesurable et qu'il existe une fonction mesurable bornée  $g$  telle que

$$Z_n = \mathbb{E}[g(X) | \mathcal{F}_n] = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u) du.$$

3. En déduire que pour nombre dyadique  $x$ , on a bien

$$f(x) - f(0) = \int_0^x g(z) dz,$$

et conclure dans le cas général.

**Exercice 9. Loi du zéro un de Kolmogorov via les martingales**

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes. On définit :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n &:= \sigma(X_1, \dots, X_n), & \mathcal{F}_\infty &:= \sigma\left(\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n\right), \\ \mathcal{F}^n &:= \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots), & \mathcal{F}^\infty &:= \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}^n. \end{aligned}$$

Soit  $A$  un évènement asymptotique, i.e.  $A \in \mathcal{F}^\infty$ . En utilisant la martingale fermée  $(M_n)_{n \geq 1}$  définie par  $M_n := \mathbb{E}[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_n]$ , montrer que  $\mathbb{P}(A) = 0$  ou  $\mathbb{P}(A) = 1$ .

### 3 Convergence $\mathbb{L}^p$ avec $p > 1$

#### 3.1 Inégalités maximales et convergence $\mathbb{L}^p$

**Lemme 3.** Soit  $(X_n)_n$  une sous-martingale et  $S \leq T$  des temps d'arrêt bornés. Alors  $\mathbb{E}(X_S) \leq \mathbb{E}(X_T)$ .

**Remarque 5.** On a déjà vu le cas  $S = 0$ .

*Démonstration.* On pose  $H_n = \mathbf{1}_{S < n \leq T} = \mathbf{1}_{S \leq n-1} - \mathbf{1}_{T \leq n-1} \in \mathcal{F}_{n-1}$ . Si  $N$  est tel que  $S \leq T \leq N$ , on a

$$(H \cdot X)_N = X_T - X_S \text{ et } \mathbb{E}((H \cdot X)_N) \geq \mathbb{E}((H \cdot X)_0) = 0 \quad \square$$

**Théorème 4** (Inégalité maximale de Doob). Si  $X_n$  est une sous-martingale, alors pour tout  $a > 0$ , on a

$$a \mathbb{P}(\sup_{k \in [0, n]} X_k \geq a) \leq \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\sup_{k \in [0, n]} X_k \geq a}) \leq \mathbb{E}(|X_n|).$$

*Démonstration.* On introduit le temps d'arrêt  $T = \inf\{n, X_n \geq a\}$  et l'événement  $A = \{\sup_{k \leq n} X_k \geq a\} = \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ . D'après le lemme précédent, comme  $n$  et  $T \wedge n$  sont bornées,  $\mathbb{E}(X_{T \wedge n}) \leq \mathbb{E}(X_n)$ . On a

$$X_{T \wedge n} = X_T \mathbf{1}_{T \leq n} + X_n \mathbf{1}_{T > n} \geq a \mathbf{1}_A + X_n \mathbf{1}_{A^c}.$$

Donc  $\mathbb{E}(X_n) \geq \mathbb{E}(X_{T \wedge n}) \geq a \mathbb{P}(A) + \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{A^c})$  id  $\mathbb{E}(X_n(1 - \mathbf{1}_{A^c})) \geq a \mathbb{P}(A)$ . D'où  $a \mathbb{P}(\sup X_k \geq a) \leq \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\sup X_k \geq a})$ .  $\square$

**Théorème 5** (Inégalité maximale  $\mathbb{L}^p$ ). Soit  $p > 1$  et  $X_n$  une sous-martingale positive. On pose  $\tilde{X}_n = \sup_{k \in [0, n]} X_k$ . Alors pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\mathbb{E}(\tilde{X}_n^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(X_n^p).$$

En particulier, si  $Y_n$  est une martingale et  $Y_n^* = \sup_{k \in [0, n]} |Y_k|$  alors

$$\mathbb{E}((Y_n^*)^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|Y_n|^p).$$

*Démonstration.*

- Le second point est une conséquence du premier ( $X_n = |Y_n|$ )
- On peut supposer que pour tout  $n$ ,  $\mathbb{E}(X_n^p) < \infty$ , sinon on se retrouve avec  $\infty \leq \infty$
- Par Jensen,  $\mathbb{E}(X_k^p) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n^p | \mathcal{F}_k)) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n^p | \mathcal{F}_k)) = \mathbb{E}(X_n^p)$  pour  $k \leq n$  et  $\mathbb{E}(\tilde{X}_n^p) < \infty$ .



- D'après l'inégalité maximale précédente, si  $a > 0$ ,

$$a\mathbb{P}(\tilde{X}_n \geq a) \leq \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\tilde{X}_n \geq a})$$

Donc  $a^{p-1}\mathbb{P}(\tilde{X}_n \geq a) \leq a^{p-2}\mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\tilde{X}_n \geq a})$ . On intègre en  $a$  de 0 à  $\infty$ .

- Le premier bout donne

$$\begin{aligned} \int_0^\infty a^{p-1}\mathbb{P}(\tilde{X}_n \geq a) da &= \mathbb{E}\left(\int_0^\infty a^{p-1}\mathbf{1}_{\tilde{X}_n \geq a} da\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^{\tilde{X}_n} a^{p-1} da\right) = \frac{1}{p}\mathbb{E}(\tilde{X}_n^p) \end{aligned}$$

- Et le deuxième :

$$\int_0^\infty a^{p-2}\mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\tilde{X}_n \geq a}) da = \frac{1}{p-1}\mathbb{E}(X_n \tilde{X}_n^{p-1}) \leq \frac{1}{p-1}\mathbb{E}(X_n^p)^{\frac{1}{p}}\mathbb{E}(\tilde{X}_n^p)^{\frac{p-1}{p}}$$

En combinant les trois points précédents, on obtient le résultat.  $\square$

**Théorème 6** (Convergence  $\mathbb{L}^p$ ). *Soit  $(X_n)_n$  une martingale. Supposons qu'il existe  $p > 1$  tel que  $\sup_n \mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$ . Alors  $X_n$  converge p.s. et dans  $\mathbb{L}^p$  vers  $X_\infty \in \mathbb{L}^p$  avec  $\mathbb{E}(|X_\infty|^p) = \sup_n \mathbb{E}(|X_n|^p)$  et*

$$\mathbb{E}((X_n^*)^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|X_\infty|^p).$$

*Démonstration.* Si  $(X_n)_n$  est bornée dans  $\mathbb{L}^p$  alors elle est bornée dans  $\mathbb{L}^1$  donc on a la convergence p.s. vers  $X_\infty \in \mathbb{L}^1$ . D'après l'inégalité maximale  $\mathbb{L}^p$ , on a

$$\mathbb{E}((X_n^*)^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(|X_n|^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_n \mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$$

En passant à la limite, on a  $\mathbb{E}((X_\infty^*)^p) < \infty$ . Pour tout  $n$ ,  $|X_n| \leq X_\infty^*$  et  $|X_n|^p \leq |X_\infty^*|^p \in \mathbb{L}^1$  donc par convergence dominée,

$$\mathbb{E}(|X_\infty|^p) \leq \mathbb{E}(|X_\infty^*|^p)$$

et on a la convergence dans  $\mathbb{L}^p$ . Comme  $|X_n|^p$  est une sous-martingale, la suite  $\mathbb{E}(|X_n|^p)$  est croissante et on a :

$$\mathbb{E}(|X_\infty|^p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(|X_n|^p) = \sup_n \mathbb{E}(|X_n|^p). \quad \square$$

### 3.2 Cas des martingale de carré intégrable

Soit  $(M_n)$  une martingale de carré intégrable ie  $\mathbb{E}(M_n^2) < \infty$  pour tout  $n$ . On sait que si  $n \geq m$ ,  $M_m = \mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_m)$  et  $M_n - M_m \perp \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_m)$ . Ainsi, si  $k \leq l \leq m \leq n$ ,

$$\langle M_n - M_m, M_l - M_k \rangle = 0.$$

Ainsi, la formule

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^n (M_k - M_{k-1})$$

exprime  $M_n$  comme somme de termes orthogonaux. Donc par Pythagore, on a

$$\mathbb{E}(M_n^2) = \mathbb{E}(M_0^2) + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}((M_k - M_{k-1})^2).$$

**Théorème 7.** *Soit  $(M_n)_n$  une martingale  $\mathbb{L}^2$ . Alors  $(M_n)$  est bornée dans  $\mathbb{L}^2$  ssi*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}((M_k - M_{k-1})^2) < \infty.$$

*Auquel cas,  $(M_n)$  converge p.s. et dans  $\mathbb{L}^2$  vers  $M_\infty \in \mathbb{L}^2$ .*

*Démonstration.* C'est la formule précédente combinée aux résultats des sections précédentes.  $\square$

#### 3.2.1 Décomposition de Doob–Meyer

**Théorème 8** (Décomposition de Doob–Meyer). *Soit  $(X_n)$  une suite de variables adaptées et  $\mathbb{L}^1$ . Alors  $X_n$  admet la décomposition  $X_n = X_0 + M_n + A_n$  où  $M_n$  est une martingale nulle en zéro et  $A_n$  est une suite prévisible nulle en zéro. Cette décomposition est unique au sens où si  $X_n = X_0 + \tilde{M}_n + \tilde{A}_n$ , alors*

$$\mathbb{P}(M_n = \tilde{M}_n, A_n = \tilde{A}_n, \forall n) = 1.$$

*La suite  $(X_n)_n$  est une sous-martingale ssi la suite prévisible  $(A_n)_n$  est croissante, au sens où l'on a  $\mathbb{P}(A_n \leq A_{n+1}, \forall n) = 1$ .*

*Démonstration.* Si  $(X_n)$  admet une telle décomposition, on a nécessairement

$$\mathbb{E}(X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = A_n - A_{n-1},$$

i.e. on a

$$A_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k - X_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1}).$$

En définissant  $A_n$  par la formule précédente et  $M_n = X_n - X_0 - A_n$ , on trouve bien que  $A_n$  est prévisible et  $M_n$  est une martingale nulles toutes deux en 0.  $\square$

**Définition 1.** Soit  $M_n$  une martingale  $\mathbb{L}^2$  nulle en 0 pour simplifier. Alors  $(M_n^2)$  est une sous-martingale, qui admet donc une décomposition de Doob :  $M_n^2 = A_n + N_n$  avec  $A$  prévisible croissante et  $N$  une martingale. La suite  $A$  est appelée le compensateur de  $M$ , ou encore le crochet de  $M$ . On la note souvent  $\langle M \rangle_n$ .

**Proposition 2.** Comme  $\mathbb{E}(M_n^2) = \mathbb{E}(\langle M \rangle_n)$ ,  $M_n$  est bornée dans  $\mathbb{L}^2$  ssi  $\mathbb{E}(\langle M \rangle_\infty) < \infty$  où  $\langle M \rangle_\infty = \lim \langle M \rangle_n$  (limite croissante).

**Théorème 9.** Soit  $M_n$  une martingale  $\mathbb{L}^2$ .

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(\omega)$  existe dès lors que  $\langle M \rangle_\infty(\omega) < \infty$
- Supposons que les accroissements de  $M_n$  sont bornés, i.e.  $\exists K$

$$|M_n(\omega) - M_{n-1}(\omega)| \leq K,$$

pour (presque) tout  $n$  et  $\omega$ . Alors  $\langle M \rangle_\infty$  existe dès lors que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(\omega)$  existe.

*Démonstration.*

- $A_n = \langle M \rangle_n$  est prévisible donc pour tout  $k > 0$ ,  $S_k = \inf\{n, A_{n+1} > k\}$  est un temps d'arrêt. De plus,  $A_n^{S_k} = A_{S_k \wedge n}$  est prévisible. En effet, si  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,

$$\{A_{S_k \wedge n} \in B\} = \underbrace{\bigcup_{r=0}^{n-1} \{S_k = r \text{ et } A_r \in B\}}_{\in \mathcal{F}_{n-1}} \cup \underbrace{\{A_n \in B \text{ et } (S_k \leq n-1)^c\}}_{\in \mathcal{F}_{n-1}}$$

Comme  $(M^2)^{S_k} - A^{S_k} = (M^2 - A)^{S_k}$  est une martingale, on a  $A^{S_k} = \langle M^{S_k} \rangle$ . Par ailleurs,  $A^{S_k}$  est borné par  $k$  donc  $\langle M^{S_k} \rangle \leq k$  et  $M^{S_k}$  est bornée dans  $\mathbb{L}^2$  donc converge p.s. et dans  $\mathbb{L}^2$ . En outre,

$$\{A_\infty = \infty\} = \bigcup_k \{S_k = +\infty\}$$

donc si  $\omega \in \{A_\infty = \infty\}$ , on a  $S_k(\omega) = +\infty$  pour un certain  $k$  et  $M_n^{S_k(\omega)} = M_n(\omega)$ .

- On raisonne par l'absurde : si  $\mathbb{P}(A_\infty = \infty \text{ et } \sup_n |M_n| < \infty) > 0$ . Alors il existe  $c > 0$  tel que  $\mathbb{P}(A_\infty = \infty \text{ et } T(c) = \infty) > 0$  où  $T(c) = \inf\{n, |M_n| > c\}$ . Le temps  $T(c)$  est un temps d'arrêt. Par le théorème d'arrêt (appliqué à  $N = M^2 - A$  en  $\tau = T(c) \wedge n$ ),  $\mathbb{E}(M_{T(c) \wedge n}^2) = \mathbb{E}(A_{T(c) \wedge n})$ .

Par ailleurs,  $M_{T(c) \wedge n}^2 \leq c + K$ . L'égalité précédente donne  $\mathbb{E}(T(c) \wedge n) \leq c + K$  pour tout  $n$  et avec  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\mathbb{E}(A_{T(c)}) \leq c + K$ . Ceci est incompatible avec  $\mathbb{P}(A_{T(c)} = +\infty) > 0$ . On conclut donc que  $\mathbb{P}(A_\infty = \infty \text{ et } \sup_n |M_n| < \infty) = 0$ .  $\square$

**Exercice 10.** : *Transformée de Lévy discrète*

Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables indépendantes et de même loi  $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$ . On pose  $\mathcal{B}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $\mathcal{B}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$  et  $S_0 := 0$ ,  $S_n := X_1 + \dots + X_n$  pour  $n \geq 1$ . On considère la suite  $(M_n)_{n \geq 0}$  définie par  $M_0 := 0$  et pour  $n \geq 1$  :

$$M_n := \sum_{k=1}^n \text{signe}(S_{k-1})X_k.$$

1. Quel est le compensateur de la sous-martingale  $(S_n^2)_{n \geq 0}$  ?
2. Montrer que  $(M_n)_{n \geq 0}$  est une martingale et calculer le compensateur de  $(M_n^2)_{n \geq 0}$ .
3. Quelle est la décompositin de Doob de  $(|S_n|)_{n \geq 0}$  ? En déduire que  $M_n$  est mesurable par rapport à la tribu  $\sigma(|S_1|, \dots, |S_n|)$

**Exercice 11.** *Autour d'un théorème de Kakutani*

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires, indépendantes et positives et telles que  $\mathbb{E}[X_1] = 1$  pour tout  $n \geq 1$ . On définit alors  $a_n := \mathbb{E}[\sqrt{X_n}] \in [0, 1]$  pour  $n \geq 1$  et

$$M_0 := 1, \quad N_0 := 1, \quad M_n := \prod_{k=1}^n X_k, \quad N_n := \prod_{k=1}^n \frac{\sqrt{X_k}}{a_k}.$$

1. Montrer que les suites  $(M_n)_{n \geq 1}$  et  $(N_n)_{n \geq 1}$  convergent presque sûrement.
2. On suppose que  $\prod_{k=1}^{\infty} a_k > 0$ .
  - (a) Montrer que la suite  $(N_n)_{n \geq 1}$  converge dans  $\mathbb{L}^2$ .
  - (b) En déduire que  $(M_n)_{n \geq 1}$  est uniformément intégrable.
3. On suppose maintenant  $\prod_{k=1}^{\infty} a_k = 0$ .
  - (a) Montrer qu'alors  $(M_n)_{n \geq 1}$  converge presque sûrement vers zéro.
  - (b) En déduire que  $(M_n)_{n \geq 1}$  n'est pas uniformément intégrable.

### 3.2.2 Théorème classiques pour les martingales de carré intégrable

Commençons par rappeler le lemme classique suivant.

**Lemme 4** (Césaro). *Soit  $b_n$  une suite croissante de réels positifs qui tend vers  $+\infty$  et  $v_n$  une suite réelle convergeant vers  $v_\infty$ . Alors*

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k-1})v_k \rightarrow v_\infty.$$

On peut en déduire le résultat suivant.

**Lemme 5** (Kronecker). *Soit  $b_n$  une suite croissante positive qui diverge vers  $+\infty$  et  $x_n$  une suite réelle. Alors si  $S_n = x_1 + \dots + x_n$ , on a*

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{b_k} \text{ cv } \Rightarrow \frac{S_n}{b_n} \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* On pose  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{b_k}$  et on suppose  $u_n \rightarrow u_\infty \in \mathbb{R}$ . On a naturellement  $u_n - u_{n-1} = \frac{x_n}{b_n}$  de sorte que

$$S_n = \sum_{k=1}^n b_k(u_k - u_{k-1}) = u_n b_n - \sum_{k=1}^n u_k(b_k - b_{k-1}).$$

Donc  $\frac{S_n}{b_n} = u_n - \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n u_k(b_k - b_{k-1}) \rightarrow u_\infty - u_\infty = 0$  par Césaro.  $\square$

**Théorème 10.** *Soit  $(M_n)_n$  une martingale de carré intégrable nulle en zéro. Alors sur l'ensemble  $\{\langle M \rangle_\infty = \infty\}$  on a  $\frac{M_n}{\langle M \rangle_n} \rightarrow 0$  p.s.*

*Démonstration.* Soit  $A = \langle M \rangle$  le compensateur de  $M$ . La suite  $H_n = (1 + A_n)^{-1}$  est prévisible et bornée par 1. Par suite,

$$W_n := \sum_k \frac{M_k - M_{k-1}}{1 + A_k} = (H \cdot M)_n$$

est une martingale et

$$\begin{aligned} \langle W \rangle_n - \langle W \rangle_{n-1} &= \mathbb{E} \left[ \left( \frac{M_n - M_{n-1}}{1 + A_n} \right)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &= \frac{1}{(1 + A_n)^2} \mathbb{E} \left[ (M_n - M_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &= \frac{1}{(1 + A_n)^2} \mathbb{E} \left[ M_n^2 - M_{n-1}^2 \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &= \frac{A_n - A_{n-1}}{(1 + A_n)^2} \leq \frac{1}{1 + A_{n-1}} - \frac{1}{1 + A_n}. \end{aligned}$$

En sommant, on trouve ainsi  $\langle W \rangle_n \leq 1$  p.s., et d'après la proposition 2 et le théorème 9 ci-dessus, la martingale  $W_n$  converge p.s. et dans  $\mathbb{L}^2$ . Par le lemme de Kronecker, on déduit que presque sûrement  $\frac{M_n}{1 + A_n} \rightarrow 0$  donc  $\frac{M_n}{A_n}$  aussi.  $\square$

**Théorème 11 (Admis).** *Sous l'hypothèse  $\{\langle M \rangle_\infty = \infty\}$  et si la condition supplémentaire de Lindeberg est satisfaite, i.e.  $\forall \varepsilon > 0$ , lorsque  $n$  tend vers l'infini*

$$\frac{1}{\langle M \rangle_n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(M_i - M_{i-1})^2 \mathbb{1}_{|M_i - M_{i-1}| > \varepsilon \sqrt{\langle M \rangle_n}} \mid \mathcal{F}_{i-1}] \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$

on a la convergence en loi

$$\frac{M_n}{\sqrt{\langle M \rangle_n}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

**Exercice 12. Thunderbolt**

On peut se demander si les performances sportives seront toujours battues et si oui, à quel rythme. Afin de modéliser cette situation, on considère une suite  $(X_n)$  de variables aléatoires indépendantes et de même loi admettant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^+$ . Pour tout entier  $n \geq 1$  fixé, on note  $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$  le vecteur composé des variables  $X_i$  réordonnées, c'est-à-dire  $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$ , et on note  $R_n$  le rang relatif de  $X_n$ . Il est clair que  $R_n$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Pour  $n \geq 1$ , on dit qu'il se produit un record à l'instant  $n$  si  $R_n = 1$ . On s'intéresse au comportement asymptotique des suites  $(Z_n)$  et  $(M_n)$  données par

$$Z_n := \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{R_k=1}, \quad M_n := Z_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

La suite  $(Z_n)$  compte le nombre de records qui se produisent avant l'instant  $n$ . On rappelle que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log(n) + \gamma + o(1),$$

où  $\gamma \approx 0.5772$  est la constante d'Euler.

1. Montrer que les variables aléatoires  $R_1, \dots, R_n$  sont indépendantes et que pour  $1 \leq k \leq n$  :

$$\mathbb{P}(R_n = k) = \frac{1}{n}.$$

2. Calculer, pour tout  $n \geq 1$ , l'espérance et la variance de  $Z_n$ .
3. Montrer que  $(M_n)$  est une martingale de carré intégrable et calculer son compensateur  $\langle M \rangle_n$ .
4. En déduire la convergence presque sûre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M_n}{\log(n)} = 0.$$

5. Montrer également le théorème limite central

$$\frac{M_n}{\sqrt{\log(n)}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, 1).$$

6. En déduire que lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $Z_n/\log(n)$  tend presque vers 1 et que l'on a

$$\frac{Z_n - \log(n)}{\sqrt{\log(n)}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, 1).$$

## 4 Martingales rétrogrades

**Définition 2.** Une filtration rétrograde est une famille  $(\mathcal{F}_n)$  indexée par les entiers négatifs de sous-tribus de  $\mathcal{F}$  et telle que pour tout  $n \leq m$ ,  $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_m$ . On notera  $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n \leq 0} \mathcal{F}_n$ .

**Définition 3.** Une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de variables adaptées intégrables est une martingale (resp. sous/sur) ssi pour tout  $n \leq m$ ,  $\mathbb{E}(X_m | \mathcal{F}_n) = X_n$  (resp.  $\geq, \leq$ ).

**Théorème 12.** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sur-martingale rétrograde bornée dans  $\mathbb{L}^1$  telle que  $\sup_n \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$ .

Alors  $X_n$  est uniformément intégrable et converge p.s. et  $\mathbb{L}^1$  en  $-\infty$  vers  $X_\infty$  tel que  $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{-\infty}) \leq X_\infty$ .

**Corollaire 4.** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une martingale rétrograde. Alors  $(X_n)_n$  converge p.s. et dans  $\mathbb{L}^1$  vers une variable  $X_\infty$ .

*Démonstration.*  $X_n = \mathbb{E}(X_0 | \mathcal{F}_n)$  pour tout  $n \leq 0$ . De plus, on applique le théorème, puisqu'on a  $\sup \mathbb{E}(|X_n|) \leq \mathbb{E}(|X_0|)$ .  $\square$

**Corollaire 5.** Soit  $Z \in \mathbb{L}^1$  et  $(\mathcal{G}_n)$  une suite décroissante de tribus. On pose  $\mathcal{G}_\infty = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{G}_n$ .

Alors  $\mathbb{E}(Z | \mathcal{G}_n) \rightarrow \mathbb{E}(Z | \mathcal{G}_\infty)$  p.s. et dans  $\mathbb{L}^1$ .

*Démonstration.* Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $X_{-n} = \mathbb{E}(Z | \mathcal{G}_n)$  et  $\mathcal{F}_n = \mathcal{G}_n$ . Alors  $X_n$  est une martingale rétrograde pour  $\mathcal{F}_n$  et le théorème précédent conclut.  $\square$

**Exemple 1.** On peut redémontrer la loi des grands nombres.  $\mathbb{E}(X_1 | S_n)$  est  $S_n$ -mesurable donc il existe  $g$  mesurable telle que  $\mathbb{E}(X_1 | S_n) = g(S_n)$ . Comme les lois de  $(X_1, S_n)$  et  $(X_k, S_n)$  sont égales pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  donc pour tout  $h$  mesurable bornée,

$$\mathbb{E}(X, h(S_n)) = \mathbb{E}(X_k h(S_n)) = \mathbb{E}(g(S_n) h(S_n))$$

donc  $\mathbb{E}(X_k | S_n) = g(S_n)$ . En sommant  $S_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k | S_n) = ng(S_n)$  ie  $\mathbb{E}(X_1 | S_n) = g(S_n) = \frac{S_n}{n}$ . Par ailleurs,  $\mathbb{E}(X_1 | S_n) = \mathbb{E}(X_1 | S_n, X_{n+1}, \dots)$  car les  $X_i$  sont i.i.d. On pose  $\mathcal{G}_n = \sigma(S_n, X_{n+1}, \dots) = \sigma(S_n, S_{n+1}, \dots)$ . C'est une suite décroissante de tribus et  $\mathcal{G}_\infty = \bigcap_n \sigma(S_n, S_{n+1}, \dots)$  est triviale (loi 0-1 de Kolmogorov). Donc lorsque  $n$  tend vers l'infini

$$\frac{S_n}{n} = \mathbb{E}(X_1 | \mathcal{G}_n) \rightarrow \mathbb{E}(X_1 | \mathcal{G}_\infty) = \mathbb{E}(X_1).$$

dans  $\mathbb{L}^1$  et p.s.