QUELQUES RAPPELS SUR LES MARTINGALES 1

1 Uniforme intégrabilité

Définition 1. *Une famille $(X_i)_{i\in I}$ de variables aléatoires $\mathbb{L}^1$ est dite uniformément intégrable si*

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{i\in I} \mathbb{E}(|X_i|\mathbb{1}_{|X_i|>N}) = 0.$$

Remarque 1. *Si $(X_i)_i$ est uniformément intégrable, alors $(X_i)_i$ est bornée dans $\mathbb{L}^1$. En effet, il suffit de prendre N assez grand pour que le sup soit inférieur à 1 et on a alors $\sup_i \mathbb{E}(|X_i|) \leqslant N+1$.*

Exemple 1.

- *Si $X \in \mathbb{L}^1$, $\{X\}$ est uniformément intégrable.*
- *Si $X_1, \ldots, X_n \in \mathbb{L}^1$ alors $(X_1, \ldots, X_n)$ est uniformément intégrable.*
- *Les variables dominées par $Z \in \mathbb{L}^1$ ie $\{X, |X| \leqslant Z \text{ p.s.}\}$ sont uniformément intégrables.*
- *Une famille bornée dans $\mathbb{L}^p$ avec $p > 1$ est uniformément intégrable. En effet,*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X_i|\mathbb{1}_{|X_i|>N}) &= \mathbb{E}\left(\frac{|X_i|}{|X_i|^p}|X_i|^p\mathbb{1}_{|X_i|>N}\right) \leqslant N^{1-p}\mathbb{E}(|X_i|^p)\\ &\leqslant N^{1-p}\sup \mathbb{E}(|X_i|^p).\end{aligned}$$

Voici une caractérisation alternative.

Proposition 1. *Soit $X = (X_i)_i$ une famille de variables aléatoires définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et bornée dans $\mathbb{L}^1$. Alors X est uniformément intégrable ssi*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ (A \in \mathcal{F} \text{ et } \mathbb{P}(A) < \delta) \Rightarrow (\mathbb{E}(|X_i|\mathbb{1}_A) \leqslant \varepsilon, \forall i \in I).$$

Démonstration.

$\Rightarrow$ Soit $\varepsilon > 0$, et N assez grand pour que $\sup \mathbb{E}(|X_i|\mathbb{1}_{|X_i|\geqslant N}) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Si on pose $\delta = \frac{\varepsilon}{2N}$ et si A est tel que $\mathbb{P}(A) < \delta$:

$$\mathbb{E}(|X_i|\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(|X_i|\mathbb{1}_{A\cap\{|X_i|>N\}}) + \mathbb{E}(|X_i|\mathbb{1}_{A\cap\{|X_i|\leqslant N\}}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + N\mathbb{P}(A) \leqslant \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Par l'inégalité de Markov, $\mathbb{P}(|X_i| > N) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X_i|)}{N} \leqslant \frac{\sup \mathbb{E}(|X_i|)}{N}$.
Soit $\varepsilon > 0$ et δ associé. Si N est assez grand pour que $\frac{\sup \mathbb{E}(|X_i|)}{N} < \delta$ alors pour tout i, $\mathbb{E}(|X_i|\mathbb{1}_{|X_i|>N}) \leqslant \varepsilon$ (prendre $A = \{|X_i| > N\}$). Donc X est uniformément intégrable. $\square$

Corollaire 1. *Soient $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{I}$ l'ensemble des sous-tribus de $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{G} \in \mathcal{I}$, on pose $X_\mathcal{G} := \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$. Alors la famille $(X_\mathcal{G})_{\mathcal{G}\in\mathcal{I}}$ est uniformément intégrable.*

Démonstration. On va utiliser la caractérisation précédente.

Soit $\varepsilon > 0$, comme X est uniformément intégrable, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{F}$ de probabilité au plus δ, on ait $\mathbb{E}(|X|\mathbb{1}_A) \leqslant \varepsilon$. Par l'inégalité de Markov, on a alors $\mathbb{P}(|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})| \geqslant N) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|)}{N}$. Soit N assez grand pour que $\frac{\mathbb{E}(|X|)}{N} < \delta$, on a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})|\mathbb{1}_{|E(X|\mathcal{G})|>N}) &\leqslant \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X| \mid \mathcal{G})\mathbb{1}_{|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|>N}) \\ &= \mathbb{E}(|X|\mathbb{1}_{|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|>N}) \leqslant \varepsilon,\end{aligned}$$

en prenant pour événement $A = \{|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})| > N\}$. Cette majoration est indépendante de $\mathcal{G}$ donc on peut passer au sup, d'où le résultat. □

Théorème 1. *Soit $(X_n)_n$ une suite de variables qui converge en probabilité vers X_∞. Alors $(X_n)_n$ est uniformément intégrable ssi elle converge dans $\mathbb{L}^1$ vers X_∞.*

Remarque 2. *En vertu du théorème ci-dessus, l'uniforme intégrabilité peut être vue comme une condition nécéssaire et suffisante pour appliquer le théorème de convergence dominée.*

Démonstration.

- $\Leftarrow$ Si $(X_n)_n$ converge dans $\mathbb{L}^1$ alors X est bornée dans $\mathbb{L}^1$ et si $\varepsilon > 0$, il existe N assez grand de sorte que pour tout $n \geqslant N$, $\mathbb{E}(|X_n - X_N|) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
  La famille $(X_0, \dots, X_N)$ est uniformément intégrable donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $i \in [\![0, N]\!]$, $\mathbb{E}(|X_i|\mathbb{1}_A) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ si $\mathbb{P}(A) < \delta$.
  On a alors pour tout $n > N$,
  $$\mathbb{E}(|X_n|\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(|X_n - X_N|\mathbb{1}_A) + \mathbb{E}(|X_N|\mathbb{1}_A) \leqslant \varepsilon.$$
- $\Rightarrow$ Si (X_n) est uniformément intégrable, alors $(X_m - X_n)_{m,n}$ l'est aussi. Soit $\varepsilon > 0$. Pour N assez grand, $\mathbb{E}(|X_m - X_n|\mathbb{1}_{|X_m - X_n|>N}) \leqslant \varepsilon$. Ainsi
  $$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X_m - X_n|)) &= \mathbb{E}(|X_m - X_n|\mathbb{1}_{|X_m - X_n|<\varepsilon}) \\ &+ \mathbb{E}(|X_m - X_n|\mathbb{1}_{\varepsilon\leqslant|X_m - X_n|\leqslant N}) \\ &+ \mathbb{E}(|X_m - X_n|\mathbb{1}_{|X_m - X_n|>N}) \\ &\leqslant \varepsilon + N\mathbb{P}(|X_m - X_n| \geqslant \varepsilon) + \varepsilon.\end{aligned}$$
  Or lorsque m et n tendent vers l'infini, on a
  $$\mathbb{P}(|X_m - X_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}\left(|X_m - X_\infty| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|X_n - X_\infty| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \to 0.$$
  On a donc $\limsup_{m,n\to\infty} \mathbb{E}(|X_m - X_n|) \leqslant 2\varepsilon$, i.e. (X_n) est de Cauchy, donc converge dans $\mathbb{L}^1$. □

Corollaire 2. *Soit* $(X_n)_n$ *une suite de variables qui converge en probabilité vers* X_∞ *et* $p \geq 1$*. Alors* (X_n) *converge dans* $\mathbb{L}^p$ *vers* X_∞ *ssi* $(|X_n|^p)_n$ *est uniformément intégrable.*

Exercice 1. *Autour de l'uniforme intégrabilité*

1. On considère l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue et la famille de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ définie par $X_n(\omega) := n$ si $\omega \leq \frac{1}{n}$ et 0 sinon. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ n'est pas uniformément intégrable.
2. Toujours sur l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, on considère la famille de variables aléatoires
$$\mathcal{X} := \{X_\alpha,\, \alpha \in [0, 1/2]\}\,, \quad \text{où} \quad X_\alpha(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega - \alpha}} \mathbb{1}_{]\alpha,1]}(\omega).$$
Montrer que la famille $\mathcal{X}$ est uniformément intégrable mais qu'elle n'est pas dominée par une variable intégrable.
3. Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux familles de variables aléatoires uniformément intégrables définies sur un même espace de probabilités. Montrer que la famille des sommes $\mathcal{Z} := \{Z = X + Y,\, X \in \mathcal{X},\, Y \in \mathcal{Y}\}$ est uniformément intégrable.

Exercice 2. *Uniforme intégrabilité via une fonction test*

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrez qu'il existe une fonction continue $g : \mathbb{R}^+ \to]0, +\infty[$ telle que
$$\int^{+\infty} g(x) = +\infty, \quad \text{mais} \quad \int^{+\infty} f(x)g(x) < \infty.$$
2. Montrer qu'une famille de variables aléatoires $\mathcal{X}$ est uniformément intégrable si et seulement si il existe une fonction mesurable $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ qui est telle que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\phi(x)}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{X\in\mathcal{X}} \mathbb{E}[\phi(|X|)] < +\infty.$$

2 La notion de martingale

2.1 Définition et exemples

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

Définition 2. *Une filtration de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$. On dit que $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_n, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité filtré.*

Exemple 2. *Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires. La suite $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ est une filtration. On l'appelle filtration canonique associée à $(X_n)_n$.*

Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1[, \mathscr{B}([0,1[), \lambda)$ alors la suite $\mathcal{G}_n = \sigma([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}[, i \in [\![1, 2^n]\!])$ définit une filtration appellée filtration dyadique de $[0,1[$.

Définition 3. *Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires et $(\mathcal{F}_n)_n$ une filtration. On dit que $(X_n)_n$ est adaptée à $(\mathcal{F}_n)_n$ ssi X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable. On dit que $(X_n)_n$ est prévisible ssi X_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable.*

Dans la suite, on fixe un espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_n, \mathbb{P})$ filtré.

Définition 4. *Soit $(X_n)_n$ une suite de variables adaptées à une filtration $(\mathcal{F}_n)_n$ et telles que $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$. On dit que*

- *$(X_n)_n$ est une martingale ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$ p.s.*
- *$(X_n)_n$ est une sous-martingale ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \geqslant X_n$ p.s.*
- *$(X_n)_n$ est une sur-martingale ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \leqslant X_n$ p.s.*

Remarque 3. *Une sous-martingale croît en moyenne, une sur-martingale décroît en moyenne.*

Proposition 2. *Si $(X_n)_n$ est une martingale, on a en fait pour tout entier $m \geqslant n$, $\mathbb{E}(X_m \mid \mathcal{F}_n) = X_n$ p.s. et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$.*

Démonstration. Le cas $n = m$ est clair, $m = n + 1$ découle de la définition. Enfin, si $m \geqslant n + 2$,

$$\mathbb{E}(X_m \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_m \mid \mathcal{F}_{m-1}) \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{m-1} \mid \mathcal{F}_n) \qquad \square$$

Exemple 3.

- *Soit X une valeur aléatoire telle que $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ et $(\mathcal{F}_n)_n$ une filtration. Alors, $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$ est une martingale dite fermée.*

  X_n est intégrable car X l'est. $(X_n)_n$ est adaptée et :

  $$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n) = X_n$$

  A-t-on $X_n \to X$?

- *Soit $x \in \mathbb{R}^n$, Y_i iid à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On pose $X_0 = x$ et $X_n = x + \sum_{i=1}^{n} Y_i$. On a :*

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_n + Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n + \mathbb{E}(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n + \mathbb{E}(Y_{n+1})$$

  Suivant le signe de $\mathbb{E}(Y_0)$, on a une martingale, sous-martingale ou sur-martingale.

- *Soit G un groupe, μ une mesure de probabilité sur G telle que $\int_G g \,\mathrm{d}\mu = e_G$. $X_n = eg_1 \dots g_n$ où g_i iid de loi μ.*

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(eg_1 \dots g_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n \underbrace{\mathbb{E}(g_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)}_{=e} = X_n$$

Exercice 3. *Urne de Pólya*
On dispose (d'une infinité) de boules rouges et vertes. À l'instant 0, une urne contient une boule de chaque couleur et on effectue une succession de tirages définis par la règle suivante : on tire une boule de l'urne uniformément au hasard et on la remet dans l'urne en ajoutant une boule du même couleur. Soit S_n le nombre de boules rouges au temps n, et $X_n := S_n/(n+2)$ la proportion de boules rouges au temps n. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et calculer $\mathbb{E}[X_n]$.

Exercice 4. *Arbre de Galton–Watson*
Soit $P = \sum_{n\geq 0} p_n \delta_n$ une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$ et $(X_{n,k})_{n\geq 1, k\geq 1}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi P. On définit par récurrence une suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ telle que $Z_0 := 1$ et pour $n \geq 0$:

$$Z_{n+1} := \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k}.$$

La suite Z_n représente le nombre d'individus à la génération n d'un arbre de Galton–Watson de loi de reproduction P. On adopte ici la convention $\sum_{\varnothing} = 0$ de sorte que si $Z_n = 0$ alors $Z_{n+1} = 0$. On désigne par m la moyenne de la loi $\mathbb{P}$. Montrer que la suite $(Z_n/m^n)_{n\geq 1}$ est une martingale positive.

Exercice 5. *Modèle de Wright–Fisher*
Soient k et N deux entiers tels que $0 < k < N$. On définit par récurrence une suite de variables $(X_n^N)_{n\geq 0}$ de la façon suivante : $X_0^N := k$ et pour pour tout $n \geq 0$ et $i \in \{0, \dots, N\}$, la loi de X_{n+1}^N sachant que $X_n^N = i$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(N, i/N)$. Montrer que la suite $(X_n^N)_{n\geq 0}$ est une martingale.

2.2 Transformées de martingales

Proposition 3. *Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires adaptée telles que $\mathbb{E}(|\varphi(X_n)| < \infty$.*

- *Si $(X_n)_n$ est une martingale, alors $\varphi(X_n)$ est une sous-martingale.*
- *Si $(X_n)_n$ est une sous-martingale et φ croissante, alors $\varphi(X_n)$ est une sous-martingale.*

Démonstration. On a par Jensen $\mathbb{E}(\varphi(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)) \geqslant \varphi(\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)) = \varphi(X_n)$ si $(X_n)_n$ est une martingale. De même, $\varphi(\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)) \geqslant \varphi(X_n)$. □

Proposition 4. *Soit (X_n) une suite adaptée de variables $\mathbb{L}^1$ et $(H_n)_n$ une suite prévisible bornée. On définit $(H \cdot X)_0 = 0$ et pour tout $n > 0$,*

$$(H \cdot X)_n = H_1(X_1 - X_0) + H_2(X_2 - X_1) + \ldots + H_n(X_n - X_{n-1}).$$

Alors

- *Si $(X_n)_n$ est une martingale, $(H \cdot X)_n$ est aussi une martingale.*
- *Si $(H_n)_n$ est positive, et $(X_n)_n$une sur/sous-martingale alors $(H \cdot X_n)_n$ est une sur/sous-martingale.*

Démonstration. Comme $(H_n)_n$ est bornée, $(H \cdot X)_n$ est intégrable. Elle est aussi bien adaptée. On a enfin

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((H \cdot X)_{n+1} - (H \cdot X)_n \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(H_{n+1}(X_{n+1} - X_n)) \mid \mathcal{F}_n) \\ &= H_{n+1}\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n) = 0.\end{aligned}$$ □

Remarque 4. *Si l'on pense en terme de somme de Riemann, la suite $(H \cdot X)$ n'est autre que l'intégrale de H contre les accroissements de X i.e. $(H \cdot X)$" $=$ "$\int HdX$. Alternativement, on peut penser à $(H \cdot X)$ comme un gain cumulé dans une stratégie boursière : H_k est la mise, $X_k - X_{k-1}$ est la fluctuation du marché, donc $H_k \times (X_k - X_{k-1})$ est le gain à l'instant k et $(H \cdot X)$ comme un gain cumulé.*

Exercice 6. *Martingale identiquement distribuée*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-martingale telle que les variables X_n ont toutes même loi.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est en fait une martingale, ainsi que $(X_n \vee a)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(X_n \wedge a)_{n\in\mathbb{N}}$ où a est un réel fixé.
2. Soient $n > m$ deux entiers et a un réel. Montrer que sur l'ensemble suivant $\{\omega,\, X_m(\omega) \geq a\}$, on a $X_n \geq a$ presque sûrement. En déduire que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante presque sûrement.

3 Temps d'arrêt et théorème d'arrêt

3.1 Notion de temps d'arrêt

Définition 5. *Une variable aléatoire T à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$ est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$ ssi $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \overline{\mathbb{N}}$ ou de manière équivalente $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \overline{\mathbb{N}}$.*

Remarque 5. *On autorise bien la valeur $n = +\infty$*

$$\{T = \infty\} = \Omega \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{T = n\} \in \mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n\right).$$

Exemple 4.

- *Si $N \in \mathbb{N}$ est fixé alors $T = N$ est un temps d'arrêt. En effet, $\{T \leqslant n\} = \varnothing$ si $n < N$ et Ω sinon, qui appartient bien à $\mathcal{F}_n$.*
- *Si $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $T = \inf\{n, X_n \in A\}$ est un temps d'arrêt. En effet, on a*

  $$\{T = n\} = \{X_1 \notin A, \ldots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\} \in \mathcal{F}_n.$$

  Attention, en général, $L = \sup\{n, X_n \in A\}$ n'est pas un temps d'arrêt.

Proposition 5. *Si $S, T, (T_k)_k$ sont des temps d'arrêt, alors $S \wedge T$, $S \vee T$, $\inf T_k$, $\sup T_k$, $\liminf T_k$ et $\limsup T_k$ sont des temps d'arrêt.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\{S \wedge T \leqslant n\} = \{S \leqslant n\} \cup \{T \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$ et de la même façon $\{S \vee T \leqslant\} = \{S \leqslant n\} \cap \{T \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$. En revenant à la définition de $\limsup$ et $\liminf$ on a par exemple

$$\{\limsup_{k\to+\infty} T_k \leqslant n\} = \bigcup_{k\geqslant 1} \bigcap_{\ell\geqslant k} \{T_\ell \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n.$$

□

Définition 6. *Soit T un temps d'arrêt. On définit la tribu arrêtée au temps T par*

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F},\, A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n,\, \forall n\}.$$

Proposition 6. *Si $S \leqslant T$ sont deux temps d'arrêt, alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.*

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{F}_S$. $A \cap \{S = k\} \in \mathcal{F}_k$ pour tout k.

$$A \cap \{T = n\} = A \cap \bigcup_{k=0}^{n} \{S = k, T = n\} = \bigcup_{k=0}^{n} (A \cap \{S = k\} \cap \{T = n\}) \in \mathcal{F}_n.$$ □

Proposition 7. *Soit $(Y_n)_n$ une suite adaptée et T un temps d'arrêt. Alors la variable aléatoire*

$$\mathbb{1}_{T<\infty} Y_T = \begin{cases} Y_n & \text{si } T = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Remarque 6. *Si $T < \infty$ p.s. alors on peut écrire $Y_T(\omega) = Y_n(\omega)$ si $T(\omega) = n$ donc $Y_T(\omega) = Y_{T(\omega)}(\omega)$.*

Démonstration. Soit $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\{\mathbb{1}_{T<\infty} Y_T \in B\} \cap \{T = n\} = \{Y_n \in B\} \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n. \qquad \square$$

Remarque 7. *Si T est un temps d'arrêt et $n \in \mathbb{N}$ alors $T \wedge n$ est un temps d'arrêt est $Y_{T\wedge n}$ est $\mathcal{F}_{T\wedge n}$-mesurable donc $\mathcal{F}_n$-mesurable.*

3.2 Théorème d'arrêt

Théorème 2. *Soit $(X_n)_n$ une sur-martingale et soit T un temps d'arrêt. Alors la suite $X^T = (X_{T\wedge n})_n$ est une sur-martingale, en particulier, $\mathbb{E}(X_{T\wedge n}) \leqslant \mathbb{E}(X_0)$ pour tout n. Si $(X_n)_n$ est une martingale alors X^T aussi et $\mathbb{E}(X_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(X_0)$ pour tout n.*

Démonstration. Pour $n \geqslant 1$, On pose $H_n = \mathbb{1}_{T\geqslant n} = 1 - \mathbb{1}_{T<n} = 1 - \mathbb{1}_{T\leq n-1}$. C'est une suite prévisible et bornée. On remarque alors que $X_{T\wedge n} = X_0 + (H \cdot X)_n$. Le résultat découle donc du fait que $H \cdot X$ est une (sur)-martingale. La majoration $\mathbb{E}(X_{T\wedge n}) \leqslant \mathbb{E}(X_0)$ découle de la définition. $\square$

Corollaire 3. *Si $(X_n)_n$ est une (sur)martingale et si T est un temps d'arrêt borné, alors $\mathbb{E}(X_T)(\leqslant) = \mathbb{E}(X_0)$.*

Démonstration. Si T est bornée alors il existe un entier N déterministe tel que $T \leqslant N$. On a alors $X_T = X_{T\wedge N}$ et dans le cas d'une martingale, on a donc d'après ci-dessus $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$. Dans le cas d'une sur-martingale, on a l'inégalité correspandante. $\square$

Exemple 5 (Un contre-exemple à garder en tête.)**.** *On considère une marche aléatoire $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ avec $X_i \sim B(\pm 1, \frac{1}{2})$ i.i.d. On pose $T = \inf\{n, S_n = 1\}$, c'est un temps d'arrêt et d'après la loi des grands nombres et le TLC, il est fini p.s.. En revanche, il n'est pas borné et l'on a*

$$1 = \mathbb{E}(S_T) \neq \mathbb{E}(S_0) = 0.$$

Théorème 3. *Soit $(X_n)_n$ une martingale et soit T un temps d'arrêt. Sous chacune des conditions suivantes, la variable X_T est intégrable et $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.*

1. *T est bornée (déterministiquement),*
2. *$\mathbb{E}(T) < \infty$ et $\exists C > 0$ tel que $|X_{n+1}(\omega) - X_n(\omega)| \leqslant C$ pour (presque) tout n, ω,*
3. *$T < \infty$ p.s., et X_n est bornée indépendamment de n (déterministiquement) ,*
4. *(X_n) une martingale uniformément intégrable.*

Démonstration.

1. Déjà vu, c'est le corollaire précédent.
2. Si $\mathbb{E}(T) < \infty$, $T < \infty$ p.s., donc $X_{T\wedge n} \to X_T$ p.s. lorsque n tend vers l'infini. Par ailleurs, on a
$$X_{T\wedge n} - X_0 = \sum_{k=0}^{T\wedge n-1} (X_{i+1} - X_i), \quad \text{donc} \quad |X_{T\wedge n} - X_0| \leqslant C(T \wedge n) \leqslant C \times T.$$
On conclut par convergence dominée.
3. Le temps $T \wedge n$ est borné donc d'après le point 1), $\mathbb{E}(X_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(X_0)$. Comme plus haut, $T < \infty$ p.s. donc $X_{T\wedge n} \to X_T$ p.s. et comme $|X_n|$ majorée, on conclut à nouveau par convergence dominée.
4. Ce dernier point est un corollaire du théorème suivant.

□

Théorème 4. *Une martingale (X_n) est uniformément intégrable ssi elle est fermée i.e. $X_n = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n]$ pour tout n avec $X_\infty \in \mathbb{L}^1$. Si T un temps d'arrêt quelconque, on a alors $X_T = \mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_T)$. En particulier, $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_\infty) = \mathbb{E}(X_0)$. De plus, si $S \leqslant T$ est un temps d'arrêt, alors $X_S = \mathbb{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S)$.*

Démonstration. Admettons que (X_n) est fermée et vérifions que $X_T \in \mathbb{L}^1$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X_T|) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[|X_n| \mathbb{1}_{T=n}\right] + \mathbb{E}\left[|X_\infty| \mathbb{1}_{T=\infty}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{T=n} |\mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_n)|] + \mathbb{E}[|X_\infty| \mathbb{1}_{T=\infty}] \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X_\infty| \mathbb{1}_{T=n} \mid \mathcal{F}_n]] + \mathbb{E}[|X_\infty| \mathbb{1}_{T=\infty}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[|X_\infty| \mathbb{1}_{T=n}] + \mathbb{E}[|X_\infty| \mathbb{1}_{T=\infty}] = \mathbb{E}[|X_\infty|] < \infty.
\end{aligned}$$

On vérifie maintenant que $X_T = \mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_T)$. Soit $A \in \mathcal{F}_T$. On a

$$\mathbb{E}(X_T \mathbb{1}_A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{A\cap\{T=n\}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(X_\infty \mathbb{1}_{A\cap\{T=n\}}) = \mathbb{E}(X_\infty \mathbb{1}_A).$$

En prenant $A = \Omega$, il vient en particulier

$$\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_\infty).$$

Ensuite, si $S \leqslant T$,

$$X_S = \mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_S) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_T) \mid F_S) = \mathbb{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S). \qquad \square$$

Exercice 7. *Une réciproque au théorème d'arrêt*
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite adaptée de variables aléatoires intégrables. Montrer que, si l'on a $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$ pour tout temps d'arrêt borné τ, alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

Exercice 8. *Ruine du joueur et identité de Wald*
Soient a et b des entiers strictement positifs et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mu := p\delta_1 + q\delta_{-1}$ où $0 < p, q < 1$ et $p + q = 1$. On pose $S_0 := 0$ et $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ pour $n \geq 1$ et on désigne par $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ la filtration naturelle associée. On suppose dans un premier temps que $p \neq q$.

1. Montrer que les suites $W_n := S_n - (2p-1)n$ et $M_n = (q/p)^{S_n}$ issues de 0 et 1 respectivement sont des martingales par rapport $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.
2. Soit $T = \inf\{n \geq 0,\ S_n \notin]-a, b[\}$. Montrer que T est un temps d'arrêt fini presque sûrement.
3. En déduire les valeurs de $\mathbb{P}(S_T = -a)$, $\mathbb{P}(S_T = b)$ et $\mathbb{E}(T)$.

On suppose maintenant que $p = q = 1/2$, de sorte la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

4. Montrer que le temps T est toujours fini presque sûrement.
5. Montrer que $\mathbb{E}(S_T) = 0$ et en déduire les expressions de $\mathbb{P}(S_T = -a)$ et $\mathbb{P}(S_T = b)$.

On cherche enfin à expliciter $\mathbb{E}[T]$ dans le cas symétrique. Soit ϕ la transformée de Laplace de μ i.e. $\phi(\lambda) = \cosh(\lambda) = pe^\lambda + qe^{-\lambda}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. Pour $n \geq 0$, on pose $Y_n := e^{\lambda S_n}/\phi(\lambda)^n$. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.
7. Montrer que $\mathbb{E}(e^{\lambda S_T}\phi(\lambda)^{-T}) = 1$.
8. Retrouver le fait que $\mathbb{E}(S_T) = 0$ à partir de la dernière égalité.
9. Pour $\alpha > 1$, calculer $\mathbb{E}[\alpha^{-T}\mathbb{1}_{S_T=-a}]$ et $\mathbb{E}[\alpha^{-T}\mathbb{1}_{S_T=b}]$. En déduire $\mathbb{E}(T|S_T)$ et $\mathbb{E}[T]$.

Exercice 9. *La martingale de Labouchère*

Dans le cadre d'un jeu de pile ou face équilibré, on considère la stratégie de mise suivante, dite "martingale de Labouchère". On se donne à l'avance une liste de nombres $L = \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec pour objectif de gagner $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ euros "à coup sûr" en un temps fini. Voici la stratégie :

- avant chaque tirage de pile ou face, on mise la somme des nombres extrémaux de la liste, par exemple la mise initiale est de $x_1 + x_n$ euros ;
- si l'on gagne le tirage de pile ou face, on empoche la mise et on actualise la liste en supprimant les deux nombres extrémaux, par exemple la liste devient $\{x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ si l'on gagne au premier tirage ;
- si l'on perd le tirage de pile ou face, on perd la mise et on actualise la liste en ajoutant à la liste initiale la mise actuelle. Par exemple, si l'on perd au premier tirage de pile ou face, la liste devient $\{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} := x_1 + x_n\}$.
- on s'arrête de jouer lorsque la liste est vide ;
- si la liste contient un seul élément x_k, on mise cet élément. Si l'on gagne le tirage de pile ou face, on empoche x_k et on s'arrête, sinon la liste est actualisée à $\{x_k, x_k\}$.

Voici un exemple de partie si l'on joue avec la liste $L = \{1, 2, 4\}$ et si le début de la suite de pile ou face est $PGPGPG$ ($P =$ perdu, $G =$ gagné). Le premier argument désigne la somme totale que l'on a gagnée / perdue, le second est la liste actualisée :

$$\begin{tikzcd}
(0, \{1,2,4\}) \arrow[r, "P"] & (-5, \{1,2,4,5\}) \arrow[r, "G"] & (+1, \{2,4\}) \arrow[r, "P"] & (-5, \{2,4,6\}) \arrow[d, "G"] \\
& (7, \{\emptyset\}) & (-1, \{4,4\}) \arrow[l, "G"'] & (+3, \{4\}) \arrow[l, "P"']
\end{tikzcd}$$

1. Montrer que presque sûrement, la martingale de Labouchère permet effectivement de gagner $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ euros en un temps aléatoire T qui vérifie $\mathbb{E}[T] < +\infty$.
2. Si X_k désigne la somme gagnée / perdue après k tirages de pile ou face, calculer $\mathbb{E}[\inf_{k \geq 1} X_{T \wedge k}]$.