Corrigé de l'épreuve d'analyse et probabilités

Partie I
Asymptotique du nombre de zéros

1. La fonction $A_n(t)$ est continue sur $[1, +\infty[$ et dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$, donc intégrable sur $[1, +\infty[$. On a $A_n(t) = \dfrac{n^2}{t(t+2n)} = \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{1}{t} \quad \dfrac{1}{t+2n}\right)$.
Donc $\displaystyle\int_1^x A_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n}{2}\left[\ln\frac{t}{t+2n}\right]_1^x$, qui tend vers $\dfrac{n\ln(2n+1)}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Ainsi l'intégrale est bien convergente et $\displaystyle\int_1^{+\infty} A_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n\ln(2n+1)}{2}$.

2. (a) En multipliant par la quantité conjuguée, on a

$$|\delta_n(t) \quad A_n(t)| = |\sqrt{A_n^2(t) \quad B_n^2(t)} \quad A_n(t)| = \frac{B_n^2(t)}{\sqrt{A_n^2(t) \quad B_n^2(t)} + A_n(t)} \quad \frac{B_n^2(t)}{A_n(t)}.$$

(b) Par la formule du binôme,

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^{2n+2} \quad 1 = \sum_{k=1}^{2n+2}\binom{2n+2}{k}\left(\frac{t}{n}\right)^k \geqslant \sum_{k=1}^{2}\binom{2n+2}{k}\left(\frac{t}{n}\right)^k.$$

Ainsi, $\left(1+\dfrac{t}{n}\right)^{2n+2} \quad 1 \geqslant \dfrac{2n+2}{n}t + \dfrac{(2n+1)(2n+2)}{n^2}t^2 \geqslant 2t + 2t^2$.
On obtient ainsi en inversant $\varphi_n(t) \quad \dfrac{1}{2t+2t^2}$.

(c) On a $\varphi_n'(t) = \quad \dfrac{(2n+2)\quad 1+\frac{t}{n}\big)^{2n+1}}{n\Big(\quad 1+\frac{t}{n}\big)^{2n+2} \quad 1\Big)^2} < 0$. Puis

$$B_n^2(t) = \quad \varphi_n'(t)\frac{(n+1)^2 n}{(2n+2)\quad 1+\frac{t}{n}\big)} = \quad \varphi_n'(t)\frac{n(n+1)}{2\quad 1+\frac{t}{n}\big)}.$$

De plus, $\dfrac{1}{A_n(t)} = \dfrac{t^2+2nt}{n^2} = \dfrac{2t}{n}\left(1+\dfrac{t}{2n}\right)$ et ainsi

$$|\delta_n(t) \quad A_n(t)| \quad \frac{2}{n}t\varphi_n'(t)\left(1+\frac{t}{2n}\right)\frac{n(n+1)}{2\quad 1+\frac{t}{n}\big)} \quad (n+1)t\varphi_n'(t),$$

car $\dfrac{1+\frac{t}{2n}\big)}{1+\frac{t}{n}\big)} \quad 1$.

(d) À l'aide d'une intégration par parties, on a

$$\int_1^x |\delta_n(t) - A_n(t)|\,\mathrm{d}t \leq -(n+1)\int_1^x t\varphi_n'(t)\,\mathrm{d}t \leq (n+1)\left(\int_1^x \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t + \varphi_n(1) - x\varphi_n(x)\right).$$

En utilisant la majoration de la question 2b) pour $\varphi_n(t)$ et $\varphi_n(1)$, on a alors, en laissant tendre x vers $+\infty$,

$$\int_1^{+\infty} |\delta_n(t) - A_n(t)|\,\mathrm{d}t \leq (n+1)\left(\frac{1}{4} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2t+2t^2}\,\mathrm{d}t\right) \in O(n).$$

(e) On a $\delta_n(t) = A_n(t) + (\delta_n(t) - A_n(t))$ donc $\delta_n(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, et

$$\int_1^{+\infty} \delta_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n\ln(2n+1)}{2} + \int_1^{+\infty} (\delta_n(t) - A_n(t))\,\mathrm{d}t$$

Or $\left|\int_1^{+\infty} (\delta_n(t) - A_n(t))\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_1^{+\infty} \big|(\delta_n(t) - A_n(t))\big|\,\mathrm{d}t \in O(n)$, donc est négligeable devant $\dfrac{n\ln(2n+1)}{2}$. Ainsi,

$$\int_1^{+\infty} \delta_n(t)\,\mathrm{d}t \sim \frac{n\ln(2n+1)}{2} \sim \frac{n\ln n}{2}.$$

3. (a) On a $\left(\left(1+\dfrac{t}{n}\right)^{2n+2} - 1\right)^2 = \dfrac{(2n+2)^2}{n^2}t^2 + o(t^2)$ et $\left(\dfrac{2t}{n} + \dfrac{t^2}{n^2}\right)^2 = \dfrac{4}{n^2}t^2 + o(t^2)$, de sorte que le terme en t^2 dans l'expression de $N_n(t)$ est nul, ainsi $N_n(t) = o(t^2)$.

Par l'unicité du développement limité, la formule de Taylor-Young fournit $N_n(0) = N_n'(0) = N_n''(0) = 0$. La même formule de Taylor-Young donne alors $N_n(t) \in O(t^3)$ au voisinage de 0 (car N_n est $\mathcal{C}^3$).

Par ailleurs, $D_n(t) \sim \dfrac{16(n+1)^2}{n^4}t^4$ et ainsi $\delta_n^2(t) \in O\left(\dfrac{1}{t}\right)$. Comme $\delta_n(t) \in O\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ au voisinage de 0, cette fonction est intégrable en 0.

(b) L'inégalité $\left(1+\dfrac{t}{n}\right)^{2n} \leq e^2$ provient par exemple de $\ln(1+x) \leq x$.

L'ensemble $\mathcal{B}$ est une sous-algèbre de l'algèbre des suites de fonctions, en vertu des arguments suivants :

- La suite nulle $(g_n = 0)_n$ est dans $\mathcal{B}$ ($M = 0$ convient). Cet argument n'est d'ailleurs pas nécessaire.
- La suite constante $(g_n = 1)_n$ est dans $\mathcal{B}$ ($M = 1$ convient).
- Si $(g_n)_n$ et $(h_n)_n$ sont dans $\mathcal{B}$, associés respectivement aux constantes M_g et M_h, alors $(\lambda g_n)_n$ est dans $\mathcal{B}$ ($|\lambda|M_g$ convient), et $(g_n + h_n)_n$ est dans $\mathcal{B}$ ($M_g + M_h$ convient). Par ailleurs, si $f_n = g_n \times h_n$,

$$|f_n| \leq M_gM_h,\ |f_n'| = |g_n'h_n + g_nh_n'| \leq 2M_gM_h,\ |f_n''| = |g_n''h_n + 2g_n'h_n' + g_nh_n''| \leq 4M_gM_h$$

$$|f_n'''| = |g_n'''h_n + 3g_n''h_n' + 3g_n'h_n'' + g_nh_n'''| \leq 8M_gM_h.$$

Donc $(f_n)_n$ est dans $\mathcal{B}$.

On vérifie aisément que $\left(t \mapsto \left(1+\dfrac{t}{n}\right)^{2n}\right)_n$, $\left(t \mapsto \left(1+\dfrac{t}{n}\right)\right)_n$ et la suite de fonctions constantes $\left(t \mapsto \dfrac{4(n+1)^2}{n^2}\right)_n$ sont dans $\mathcal{B}$. La structure d'algèbre de $\mathcal{B}$ permet alors de conclure que $(N_n(t))_n$ est dans $\mathcal{B}$.

(c) Considérons M telle que $|N_n'''(t)| \leqslant M$ pour tout n et tout t. Par l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en 0, on a pour tout $t \in [0,1]$,

$$|N_n(t)| \leqslant \frac{Mt^3}{6}.$$

Par ailleurs, on peut minorer $D_n(t)$ par le premier terme de la formule du binôme pour obtenir

$$D_n(t) \geqslant \frac{16(n+1)^2}{n^4} t^4.$$

Donc $\delta_n^2(t) \leqslant \dfrac{Mn^4}{96(n+1)^2\,t}$ et $\displaystyle\int_0^1 \delta_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\frac{M}{96}} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \times \frac{n^2}{n+1} \in O(n)$.

4. (a) Comme $t > 1$, l'inégalité demandée est équivalente à $\dfrac{t^{2n+2}-1}{t^2-1} \geqslant (n+1)t^n$. On a

$$\frac{t^{2n+2}-1}{t^2-1} = \sum_{k=0}^{n} t^{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(t^{2k}+t^{2n-2k}).$$

On a $(t^{2k}+t^{2n-2k}) = t^n(t^{2k-n}+\dfrac{1}{t^{2k-n}}) \geqslant 2t^n$ d'après l'inégalité fournie par l'énoncé.
En sommant, $\dfrac{t^{2n+2}-1}{t^2-1} \geqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2t^n = (n+1)t^n$.

(b) Le changement de variable $t = 1 + \dfrac{x}{n}$ envoie le domaine $]1,+\infty[$ dans le domaine $]0,+\infty[$. On retrouve l'expression de $\delta_n(x)$ et $E_n = \dfrac{4}{n\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \delta_n(x)\,\mathrm{d}x$. Comme $\displaystyle\int_0^1 \delta_n(x)\,\mathrm{d}x \in O(n)$, ce terme est négligeable devant $\displaystyle\int_1^{+\infty} \delta_n(x)\,\mathrm{d}x$, et ainsi

$$E_n \sim \frac{2}{\pi}\ln n.$$

Partie II
Balayages orthogonaux sur la sphère

II.A - Une mesure invariante sur la sphère

1. Lorsque K est un convexe contenant 0, alors le cône engendré par $S^{n-1} \cap K$ est inclus dans K, et donc de mesure de Lebesgue plus petite que celle de K. Ainsi,

$$\lambda_S\left(S^{n-1} \cap ([-h,h] \times [-1,1]^{n-1})\right) \leqslant \frac{\lambda_n([-h,h]\times[-1,1]^{n-1})}{\lambda_n(B^n)} \leqslant \frac{2^n h}{\lambda_n(B^n)}.$$

2. Si C est le cône engendré par A et C' est le cône engendré par $r(A)$, alors on a clairement $C' = r(C)$ par la linéarité de r. Donc $\lambda_n(C') = \lambda_n(r(C)) = \lambda_n(C)$ car r est une isométrie.

3. La rotation de matrice

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & & & \\ \sin\theta & \cos\theta & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

envoie $Q_{\theta,\theta+\theta'}$ dans $Q_{0,\theta'}$.
Comme λ_S est invariante par rotation, on a $\lambda_S(Q_{\theta,\theta+\theta'}) = \lambda_S(Q_{0,\theta'})$. Or

$$\lambda_S(Q_{0,\theta+\theta'}) = \lambda_S(Q_{0,\theta}) + \lambda_S(Q_{\theta,\theta+\theta'}) \quad \lambda_S(Q_{\theta,\theta}).$$

Mais $Q_{\theta,\theta}$ est inclus dans un hyperplan, donc il en est de même de son cône engendré, et donc $\lambda_S(Q_{\theta,\theta}) = 0$. Ce qui conduit à la formule souhaitée.

La fonction $f(\theta) : [0, 2\pi] \mapsto [0, 1]$ définie par $f(\theta) = \lambda_S(Q_{0,\theta})$ est donc croissante, vérifie $f(0) = 0$ et $f(2\pi) = 1$, et $f(\theta + \theta') = f(\theta) + f(\theta')$ lorsque $\theta + \theta' \quad 2\pi$. On en déduit successivement que
- $f\left(\dfrac{2\pi}{q}\right) = \dfrac{1}{q}$ pour tout entier $q \geqslant 1$,
- $f(2\pi r) = r$ pour tout rationnel $r \in [0, 1]$.

Comme f est croissante, pour tout $x \in [0, 1]$ et $q \in \mathbf{N}^*$ on a

$$\frac{\lfloor qx \rfloor}{q} \quad f(2\pi x) \quad \frac{\lfloor qx \rfloor + 1}{q}$$

et on obtient $f(2\pi x) = x$ en laissant tendre q vers $+\infty$. Il vient alors

$$\lambda_S(Q_{\ ,\beta}) = \lambda_S(Q_{0,\beta \quad}) = \frac{\beta}{2\pi}.$$

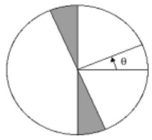
4. Remarquons tout d'abord que $L(ab) \in [0, \pi]$, et que $L(ab) \neq 0$ si $a \neq b$. On a

$$||b \quad a||^2 = ||b||^2 + ||a||^2 \quad 2\langle a, b\rangle = 2 \quad 2\cos L(ab) = 4\sin^2 \frac{L(ab)}{2}.$$

On a donc $||b \quad a|| = u(L(ab))$ avec $u(x) = 2\sin\dfrac{x}{2}$ (le signe est positif car $L(ab) \in [0, \pi]$).
Ainsi, lorsque x tend vers 0^+, $u(x) \sim x$ et $u(x) \quad x \sim \dfrac{x^3}{24}$.
On en déduit que $\dfrac{u(x) \quad x}{u(x)^2} \to 0$. Par ailleurs, comme $u(x)$ ne s'annule pas sur $]0, \pi]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{u(x) \quad x}{u(x)^2}$ est continue et prolongeable par continuité en 0. Elle est donc bornée par une constante K. On a alors $|u(x) \quad x| \quad Ku^2(x)$, d'où

$$||b \quad a|| \quad K||b \quad a||^2 \quad L(ab) \quad ||b \quad a|| + K||b \quad a||^2.$$

5. Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S^{n\ \ 1}$. On a $\langle x, a\rangle\langle x, b\rangle = x_1(x_1\cos\theta + x_2\sin\theta)$. Ainsi, ce produit est négatif lorsque x est dans le domaine grisé :



soit lorsque $x \in Q_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+\theta} \cup Q_{\ \frac{\pi}{2},\ \ \frac{\pi}{2}+\theta}$. Comme l'intersection de ces deux quartiers de sphère est incluse dans l'hyperplan $x_1 = 0$, elle est de mesure nulle et

$$\lambda_S\ \ Q_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+\theta} \cup Q_{\ \frac{\pi}{2},\ \ \frac{\pi}{2}+\theta}\big) = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\theta}{\pi} = \frac{L(ab)}{\pi}.$$

Dans le cas général, on considère une rotation r qui envoie sur la base canonique une base orthonormée dont les deux premiers vecteurs sont (a, b'), où b' est tel que b est dans l'espace vectoriel engendré par (a, b'). Il existe une telle rotation car $n \geqslant 3$. On a alors

$$\{x \in S^{n\ \ 1}, \langle x, a\rangle\langle x, b\rangle \quad 0\} = \{x \in S^{n\ \ 1}, \langle r(x), r(a)\rangle\langle r(x), r(b)\rangle \quad 0\}.$$

Par invariance par rotation,

$$\begin{aligned} \lambda_S(\{x \in S^{n\ \ 1}, \langle x, a\rangle\langle x, b\rangle \quad 0\}) &= \lambda_S\ \ \{x \in S^{n\ \ 1}, \langle x, r(a)\rangle\langle x, r(b)\rangle \quad 0\}\big) \\ &= \frac{L\ \ r(a)r(b)\big)}{\pi} \\ &= \frac{L(ab)}{\pi}. \end{aligned}$$

II.B - Balayages orthogonaux

1. (a) Si $\langle a, \gamma(t)\rangle = 0$ ou $\langle a, \gamma(t+h)\rangle = 0$, alors on a bien $N_{[t,t+h]} \geqslant 1$. Sinon, $\langle a, \gamma(t)\rangle$ et $\langle a, \gamma(t+h)\rangle$ sont de signes contraires. Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction $x \mapsto \langle a, \gamma(x)\rangle$ entre t et $t+h$ assure l'existence de $c \in [t, t+h]$ tel que $\langle a, \gamma(c)\rangle = 0$. On a alors bien $N_{[t,t+h]} \geqslant 1$.

   (b) Soit $\varphi(x) = \langle a, \gamma(x)\rangle$. La fonction φ est dérivable et $\varphi'(x) = \langle a, \gamma'(x)\rangle$.
   Si $N_{[t,t+h]}(a) \geqslant 2$, alors il existe $x_1 < x_2 \in [t, t+h]$ tels que $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$. Le théorème de Rolle assure alors qu'il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Ainsi $a \perp \gamma'(c)$.
   L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit $|\varphi'(x)| \quad ||\gamma'(x)||$ et $|\varphi''(x)| \quad ||\gamma''(x)||$, et le théorème des accroissements finis permet d'écrire successivement

$$\forall x \in [t, t+h], |\varphi'(x)| \quad ||\gamma''||.|x \quad c| \quad ||\gamma''||h$$

$$|\langle a, \gamma(t)\rangle| = |\varphi(t)| = |\varphi(t) \quad \varphi(x_1)| \quad ||\gamma''||.h.|t \quad x_1| \quad ||\gamma''||h^2.$$

   (c) En reprenant les notations précédentes, supposons sans perte de généralité que $\varphi(t) > 0$. La fonction $\varphi(t)$ s'annule en un point x_1 et atteint donc son minimum en un point c différent des extrémités du segment. En ce point on a donc $\varphi'(c) = 0$ et on conclut de la même façon qu'à la question précédente.

2. (a) Soient l'ensemble $F = \{a \in S^{n-1} \ / \ |\langle a, \gamma(t)\rangle| \leqslant ||\gamma''||_\infty h^2\}$, et l'ensemble $G = \{a \in S^{n-1} \ / \ \langle a, \gamma(t)\rangle\langle a, \gamma(t+h)\rangle \leqslant 0\}$.

On sait par II.A.5 que $\lambda_S(G) = \dfrac{L(\gamma(t)\gamma(t+h))}{\pi}\cdot$ Vérifions que la différence symétrique entre les ensembles G et $N^{-1}_{[t,t+h]}(1)$ est incluse dans F.

Si $a \in N^{-1}_{[t,t+h]}(1)\backslash G$, alors par 1c), $a \in F$. Donc $\lambda_S(N^{-1}_{[t,t+h]}(1)) \leqslant \lambda_S(G) + \lambda_S(F)$.
Si $a \in G\backslash N^{-1}_{[t,t+h]}(1)$, alors par 1a), $N_{[t,t+h]} \geqslant 2$ et par 1b), $a \in F$. Ainsi

$$\lambda_S(G) \leqslant \lambda_S(N^{-1}_{[t,t+h]}(1)) + \lambda_S(F)$$

et donc $|\lambda_S(G) - \lambda_S(N^{-1}_{[t,t+h]}(1))| \leqslant \lambda_S(F)$. Par ailleurs, la question II.A.1 fournit, à rotation près, l'inégalité $\lambda_S(F) \leqslant \dfrac{2^n h^2 ||\gamma''||_\infty}{\lambda_n(B_n)} = Ch^2$.

Pour l'écart ii), on sait par hypothèse que si $k > M$, alors $\lambda_S(N^{-1}(k)) = 0$. Par 1b), si $2 \leqslant k \leqslant M$, $\lambda_S(N^{-1}(k)) \leqslant \lambda_S(F) \leqslant Ch^2$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} k\lambda_S(N^{-1}(k)) \leqslant (M-1)MCh^2 \leqslant M^2Ch^2$ et

$$\left|\mathcal{A}_{[t,t+h]} - \lambda_S(N^{-1}(1))\right| \leqslant M^2Ch^2.$$

De plus, d'après II.A.4, $\left|\dfrac{L(\gamma(t)\gamma(t+h))}{\pi} - \dfrac{||\gamma(t)-\gamma(t+h)||}{\pi}\right| \leqslant Kh^2$. Il vient donc

$$\left|\mathcal{A}_{[t,t+h]} - \frac{||\gamma(t)-\gamma(t+h)||}{\pi}\right| \leqslant (M^2C + C + K)h^2.$$

(b) Si J est un intervalle point, $J = [t,t]$, alors $N_J^{-1}(k) = \emptyset$ si $k \geqslant 2$ et

$$N_J^{-1}(1) = \{a/a \perp \gamma(t)\}.$$

Ce dernier ensemble, ainsi que son cône engendré, est inclus dans un hyperplan de mesure nulle, donc $\mathcal{A}_J = 0$.
On en déduit ainsi que si $t < t' < t''$, alors $\mathcal{A}_{[t,t'']} = \mathcal{A}_{[t,t']} + \mathcal{A}_{[t',t'']}$.
Considérons alors $u(x) = \mathcal{A}_{[t_0,x]}$, où t_0 est la borne inférieure de I. D'après la question précédente, on a

$$\frac{1}{h}\left|u(x+h) - u(x) - \frac{||\gamma(x)-\gamma(x+h)||}{\pi}\right| \leqslant (M^2C + C + K)h$$

Donc, en passant à la limite lorsque h tend vers 0^+, u est dérivable à droite en x et sa dérivée à droite vaut $\dfrac{||\gamma'(t)||}{\pi}$. On obtient de même que u est dérivable à gauche. Il ne reste plus qu'à intégrer pour obtenir $\mathcal{A}_I$.

Partie III
Le nombre moyen de zéros d'un polynôme.

III.A - Coefficients de même loi gaussienne.

1. On a $\mathbb{P}\left(\frac{a}{||a||} \in A\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{\ \frac{||x||^2}{2}} \mathbf{1}_{\frac{x}{||x||}\in A} \mathrm{d}\lambda_n(x)$. Effectuons dans cette intégrale le changement de variable bijectif $x = r(u)$. On a alors :

$$\mathbb{P}\left(\frac{a}{||a||} \in A\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{\ \frac{||r\ u)||^2}{2}} \mathbf{1}_{\frac{r\ u)}{||r\ u)||}\in A} |\det r| \mathrm{d}\lambda_n(u)$$

Mais, comme r est une isométrie, on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{a}{||a||} \in A\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{\ \frac{||u||^2}{2}} \mathbf{1}_{\frac{u}{||u||}\in r\ ^1(A)} \mathrm{d}\lambda_n(u) = \mathbb{P}\left(\frac{a}{||a||} \in r\ ^1(A)\right).$$

2. Supposons tout d'abord que I est un segment. Fixons $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, non nul (ce qui est presque sûrement le cas). Le nombre de zéros de la fonction f associée est le cardinal de

$$\{t \in I \,/\, a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \cdots + a_n f_n(t) = 0\} = \{t \in I \,/\, \frac{a}{||a||} \perp \gamma(t)\}$$

Il s'agit donc bien de $N_I\left(\frac{a}{||a||}\right)$. Ainsi le nombre moyen de zéros dans l'intervalle I est l'espérance de $N_I\left(\frac{a}{||a||}\right)$. Comme la loi de $\frac{a}{||a||}$ est λ_S, on retrouve l'expression de $\mathcal{A}_I$. On a alors

$$\mathcal{A}_I = \frac{1}{\pi} \int_I ||\gamma'(t)||\, \mathrm{d}t$$

puisque $\gamma(t)$ est, comme $v(t)$, de classe $\mathcal{C}^2$.

Pour conclure au cas où I n'est plus un segment, on écrit I comme la limite croissante d'une suite de segments I_p. Ainsi $N_I\left(\frac{a}{||a||}\right)$ est la limite croissante de $N_{I_p}\left(\frac{a}{||a||}\right)$, et le résultat $\mathcal{A}_{I_p} \to \mathcal{A}_I$ s'obtient par le théorème de convergence monotone.

3. Écrivons $v(t) = u(t)\gamma(t)$, où $u(t) = ||v(t)||$, et $\gamma(t) \in S^{n\ 1}$.
La fonction $u : t \mapsto \sqrt{\langle v(t), v(t)\rangle}$ est $\mathcal{C}^2$. On a alors

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= \ln u(x) + \ln u(y) + \ln\langle \gamma(x), \gamma(y)\rangle \\
\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) &= \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{\langle \gamma'(x), \gamma(y)\rangle}{\langle \gamma(x), \gamma(y)\rangle} \\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{\langle \gamma'(x), \gamma'(y)\rangle}{\langle \gamma(x), \gamma(y)\rangle} \quad \frac{\langle \gamma'(x), \gamma(y)\rangle\langle \gamma(x), \gamma'(y)\rangle}{\langle \gamma(x), \gamma(y)\rangle^2}
\end{aligned}$$

Enfin, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(t,t) = \frac{||\gamma'(t)||^2}{||\gamma(t)||^2} \quad \frac{\langle\gamma'(t), \gamma(t)\rangle^2}{||\gamma(t)||^4}$. Mais comme $\gamma(t) \perp \gamma'(t)$ et que $||\gamma(t)|| = 1$, il reste

$$||\gamma'(t)||^2 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(t,t)\cdot$$

4. Les fonctions $(1, t, \ldots, t^n)$ forment bien un système libre de fonctions $\mathcal{C}^2$ qui ne s'annulent pas simultanément. La majoration de N_I par n est effective par le fait qu'un polynôme non nul (c'est presque sûrement le cas) admet au plus n zéros. Donc le nombre moyen de zéros réels du polynôme P dans un intervalle quelconque I est

$$\frac{1}{\pi}\int_I ||\gamma'(t)||\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas présent, $\varphi(x,y) = \ln(1 + xy + x^2y^2 + \cdots + x^ny^n) = \ln\left(\frac{1-(xy)^{n+1}}{1-xy}\right)$, en supposant que $xy \neq 1$. On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) &= -\frac{(n+1)y^{n+1}x^n}{1-(xy)^{n+1}} + \frac{y}{1-xy} \\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{(n+1)^2x^ny^n((xy)^{n+1}-1) - (n+1)y^{n+1}x^n(n+1)x^{n+1}y^n}{(1-(xy)^{n+1})^2} + \frac{1}{(1-xy)^2}.
\end{aligned}$$

On obtient alors, lorsque $t^2 \neq 1$, $||\gamma'(t)||^2 = \frac{1}{(t^2-1)^2} - \frac{(n+1)^2t^{2n}}{(t^{2n+2}-1)^2}$. Si l'intervalle I ne contient pas ± 1, le nombre moyen de zéros de P sur I est

$$\frac{1}{\pi}\int_I \sqrt{\frac{1}{(t^2-1)^2} - \frac{(n+1)^2t^{2n}}{(t^{2n+2}-1)^2}}\,\mathrm{d}t.$$

La parité de $||\gamma'(t)||$ et le changement de variable $t \mapsto \frac{1}{t}$ prouvent que les intégrales sur les domaines $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$, $]1, +\infty[$ sont égales, et donc que

$$\int_{\mathbf{R}} ||\gamma'(t)||\,\mathrm{d}t = 4\int_1^{+\infty} ||\gamma'(t)||\,\mathrm{d}t = E_n.$$

III.B - Une classe de polynômes circulaires

1. (a) La linéarité de L_θ est évidente de E dans $\mathbf{R}[X,Y]$. Le fait que $\mathrm{Im}\ L_\theta \subset E$ se vérifie sur la base canonique (X^kY^{n-k}) :

$$L_\theta(X^kY^{n-k}) = (\cos\theta X + \sin\theta Y)^k(-\sin\theta X + \cos\theta Y)^{n-k}$$

qui est bien homogène de degré n en X et Y.

Il est clair que $L_\theta \circ L_{\theta'} = L_{\theta+\theta'}$. Notamment, les deux applications commutent.

(b) Fixons θ et P. On a pour $h \neq 0$, $\frac{L_{\theta+h}(P) - L_\theta(P)}{h} = \frac{(L_h - L_0)(L_\theta(P))}{h}$.

Pour tout polynôme X^kY^{n-k}, considérons

$$f(h) = L_h(X^kY^{n-k}) = (\cos(h)X + \sin(h)Y)^k(-\sin(h)X + \cos(h)Y)^{n-k}.$$

La dérivée de f en 0 est

$$f'(0) = kX^{k-1}Y^{n+1-k} - (n-k)X^{k+1}Y^{n-(k+1)} = A.X^kY^{n-k},$$

la formule étant valable aussi pour $k = 0$ et $k = n$. Par linéarité, pour tout polynôme P, on a

$$\frac{(L_h - L_0)(P)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} A.P.$$

En particulier,

$$\frac{\partial(L_\theta(P))}{\partial\theta} = \lim_{h\to 0} \frac{L_{\theta+h}(P) - L_\theta(P)}{h} = A.L_\theta(P).$$

(c) Considérons des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ positifs et $D = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. On a alors

$$DAD^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1.\dfrac{\lambda_0}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ n.\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0} & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & (n-1).\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n.\dfrac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1.\dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, DAD^{-1} est antisymétrique si et seulement si

$$\text{pour tout } k \leq n-1, (n-k)\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} = (k+1)\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}, \text{ soit encore } \lambda_{k+1}^2 = \lambda_k^2 \frac{k+1}{n-k}.$$

Avec la condition $\lambda_k > 0$ et $\lambda_0 = 1$, on obtient

$$\lambda_k^2 = \lambda_0^2 \frac{1 \times 2 \times \cdots \times k}{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(k-1))} = \binom{n}{k}^{-1}.$$

La matrice D qui convient est alors $D = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\binom{n}{0}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\sqrt{\binom{n}{n}} \end{pmatrix}$

(d) Fixons P, et considérons $f(\theta) = L_\theta(P)$. On a $f(0) = P$ et $f'(\theta) = A.f(\theta)$. On en déduit que $f(\theta) = \exp(\theta A).P$, soit encore $L_\theta(P) = \exp(\theta A)P$. Ainsi

$$DL_\theta(P) = D\exp(\theta A)D^{-1}DP = \exp(\theta DAD^{-1})DP = Q(\theta)DP$$

où $Q(\theta) = \exp(\theta DAD^{-1})$ est bien orthogonale puisque DAD^{-1} est antisymétrique (c'est même une rotation puisque l'exponentielle des matrices réelles est à valeurs dans $GL_n^+(\mathbf{R})$).

2. (a) Soit B un borélien de E. $\mathbb{P}(L_\theta(P) \in B) = \mathbb{P}(DL_\theta(P) \in DB) = \mathbb{P}(DP \in Q(\theta)^{-1}DB)$. Or la variable $DP = \left(a_0\binom{n}{0}^{-1/2}, \ldots, a_n\binom{n}{n}^{-1/2}\right)$ suit une loi gaussienne centrée invariante par rotation, et donc

$$\mathbb{P}(L_\theta(P) \in B) = \mathbb{P}(DP \in Q(\theta)^{-1}DB) = \mathbb{P}(DP \in DB) = \mathbb{P}(P \in B).$$

Donc les variables $L_\theta(P)$ et P ont même loi.

(b) On pose $\ _k = a_k \binom{n}{k}^{\ \ 1/2}$. Les $\ _k$ suivent une loi gaussienne centrée de variance 1, et le nombre de zéros de $P = \sum_k a_k X^k$ est le même que le nombre de zéros de la fonction $t \mapsto \sum_k \ _k \binom{n}{k}^{1/2} t^k$. On utilise alors la formule III.A.2 avec

$$v(t) = \left(\binom{n}{0}^{1/2} t^0, \dots, \binom{n}{k}^{1/2} t^k, \dots, \binom{n}{n}^{1/2} t^n \right).$$

On a, avec les notations de III.A.3,

$$\varphi(x,y) = \ln \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^k = \ln(1+xy)^n = n \ln(1+xy).$$

On obtient alors $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \dfrac{ny}{1+xy}$ et $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{n(1+xy) \quad nxy}{(1+xy)^2}$, ce qui conduit à

$$||\gamma'(t)|| = \frac{\sqrt{n}}{1+t^2}.$$

Ainsi, le nombre de zéros de P dans l'intervalle $]a,b[$ est

$$\frac{\sqrt{n}}{\pi} \int_a^b \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{n}}{\pi} (\operatorname{Arc\,tan} b \quad \operatorname{Arc\,tan} a).$$

En particulier, si $]a,b[= \mathbf{R}$, le nombre moyen de zéros sur $\mathbf{R}$ est $\sqrt{n}$, ce qui est sensiblement différent des $\dfrac{2}{\pi} \ln n$ du cas précédent.

Partie IV
Quelques résultats sur les séries aléatoires

IV.A - Majoration du nombre de racines d'un polynôme.

1. (a) On peut raisonner sur les coefficients de Q, mais aussi remarquer qu'on a la formule de Parseval :

$$||Q||^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(\mathrm{e}^{i\theta}) \overline{Q(\mathrm{e}^{i\theta})} \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Q(\mathrm{e}^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta.$$

Or, $|\mathrm{e}^{i\theta} + z| = |1 + \mathrm{e}^{\ \ i\theta} z| = |1 + \mathrm{e}^{i\theta} \overline{z}|$, donc

$$\left| \ (X+z)Q(X)\big)(\mathrm{e}^{i\theta})\right| = \left| \ (1 + X\overline{z})Q(X)\big)(\mathrm{e}^{i\theta})\right|.$$

En s'intégrant, cette égalité donne bien $||(X+z)Q(X)|| = ||(\overline{z}X+1)Q(X)||$.

(b) Si $|z| > 1$, alors $\ \ z$ est racine de $(X+z)Q(X)$ et $\ \dfrac{1}{z}$ est racine de $(\overline{z}X+1)Q(X)$. Donc on a

$$M((X+z)Q(X)) = M((\overline{z}X+1)Q(X))$$

puisque la perte de la racine $(\ \ z)$ est compensée par le produit du coefficient dominant par $\overline{z}$. On peut alors montrer l'inégalité demandée par récurrence sur le nombre de racines de module supérieur à 1. L'initialisation dans le cas où toutes les racines sont de module $\ \ 1$ est triviale, puisqu'on a alors $M^2(P) = |a_n|^2 \quad ||P||^2$.

2. Considérons le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et soit $\rho > 1$. Soit Z le nombre de racines de module supérieur à ρ. On a

$$|a_n|\rho^Z \quad M(P) \quad ||P|| \text{ et donc } Z \quad \frac{\ln \dfrac{||P||}{|a_n|}}{\ln \rho}\cdot$$

Maintenant, prenons $\rho \in]0,1[$. Les racines de P de module $\quad \rho$ sont exactement les inverses des racines de

$$X^n P\left(\frac{1}{X}\right) = a_n + a_{n\ \ 1} X + \cdots + a_0 X^n$$

de module $\geqslant \dfrac{1}{\rho}\cdot$ Il y en a donc moins de $\dfrac{1}{\ln \dfrac{1}{\rho}} \cdot \ln \dfrac{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2}}{|a_0|}\cdot$

Enfin, si on pose $Q(X) = P(\rho X)$, il y a autant de racines de Q de module inférieur à ρ que de racines de P de module inférieur à ρ^2, soit moins de $\dfrac{1}{\ln \dfrac{1}{\rho}} \cdot \ln \dfrac{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \rho^{2k}}}{|a_0|}\cdot$

IV.B - Cas de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{\sqrt{k!}} x^k$

1. Considérons l'événement $|a_k| \geqslant k$. Pour $k \geqslant 2$, on a

$$\mathbb{P}(|a_k| \geqslant k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_k^{+\infty} \mathrm{e}^{\ \ t^2/2}\,\mathrm{d}t \quad \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_k^{+\infty} \mathrm{e}^{\ \ t}\,\mathrm{d}t \quad \mathrm{e}^{\ \ k}$$

en utilisant le fait que $\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \quad 1$. Par le lemme de Borel-Cantelli, on a presque sûrement $|a_k| \quad k$ pour tout k assez grand. Comme la série $\sum \dfrac{k}{\sqrt{k!}} x^k$ converge pour tout x réel (par la règle de D'Alembert par exemple), il en est de même de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{a_k}{\sqrt{k!}} x^k$.

2. D'après le théorème des zéros isolés, $Z_{[a,b]}(f)$ est finie dès que les a_k sont non tous nuls, ce qui est vrai presque sûrement.

   Fixons $(a_1, a_2, \ldots)$. On a alors défini f' qui admet un nombre fini de zéros $z_1, z_2, \ldots, z_p$ sur $[a,b]$. Posons $g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{a_k}{\sqrt{k!}} x^k$. Alors $f(z_j) = 0$ si et seulement si $a_0 = \quad g(z_k)$, ce qui arrive avec une probabilité nulle. Ainsi, $(a_1, a_2, \ldots)$ étant fixés, la probabilité que f et f' aient un zéro commun est nulle. Le théorème de Fubini permet alors de conclure que la probabilité que f et f' aient un zéro commun est nulle.

Maintenant, fixons $(a_k)_{k\geqslant 0}$ tels que f et f' n'aient pas de zéro commun, que $f(a)$ et $f(b)$ soient non nuls, et que la série entière définissant f soit de rayon $+\infty$. Ces conditions sont presque sûrement réalisées. La théorie des séries entières assure alors que S_n converge uniformément vers f et que S_n' converge uniformément vers f'.

Soient $a < z_1 < z_2 < \cdots < z_p < b$ les zéros de f dans $[a,b]$. Soit ε tel que les intervalles $[z_k \quad \varepsilon, z_k+\varepsilon]$ ne contiennent pas de zéros de f'. On pose

- $\quad = \inf |f(t)|$ pour $t \in [a,b]$ privé des intervalles $]z_k \quad \varepsilon, z_k+\varepsilon[$.
- $\beta = \inf |f'(t)|$ pour t parcourant les segments $[z_k \quad \varepsilon, z_k+\varepsilon]$.

Par un argument simple de compacité, $\quad > 0$ et $\beta > 0$.

Pour n assez grand, $||S_n \quad f|| \quad \frac{}{2}$ et donc S_n n'admet pas de zéros en dehors des intervalles $[z_k \quad \varepsilon, z_k+\varepsilon]$. Pour n assez grand, $||S_n' \quad f'|| \quad \frac{\beta}{2}$, donc S_n' n'admet pas de zéros dans ces intervalles. Ainsi, S_n est strictement monotone sur ces segments et admet au plus un zéro dans ces intervalles.

Or, si $||S_n \quad f|| \quad \frac{}{2}$, le signe de S_n et de f est le même en $z_k \quad \varepsilon$ et en $z_k+\varepsilon$. Comme f' ne s'annule pas sur $[z_k \quad \varepsilon, z_k+\varepsilon]$, f y est strictement monotone et donc change de signe. Il en est donc de même pour S_n, qui admet au moins un zéro sur $[z_k \quad \varepsilon, z_k+\varepsilon]$

En conclusion, pour n assez grand, $Z_{[a,b]}(S_n) = Z_{[a,b]}(f)$ (presque sûrement).

3. Pour passer de la convergence simple à l'espérance, on se place dans les hypothèses du théorème de convergence dominée. On considère $M > 0$ tel que $[a,b] \subset [\quad M, M]$ et on va construire une majoration de $Z_{[\ M,M]}(S_n)$ par une variable aléatoire intégrable ne dépendant pas de n.

   Le nombre de racines de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{k!}} X^k$ réelles et de module inférieur à M est plus petit que le nombre de racines complexes de $S_n(2MX)$ de module inférieur à $\frac{1}{2}$. D'après la question IV.A.2, ce nombre est inférieur à

$$\frac{1}{\ln\sqrt{2}} \cdot \ln \frac{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k^2}{k!} \frac{(2M)^{2k}}{2^k}}}{|a_0|}.$$

   Ainsi, sous réserve de définition, $Z_{[\ M,M]}(S_n)$ est majoré par

$$Y = \frac{1}{\ln\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k^2}{k!} (2M^2)^k \right) \quad \ln|a_0| \right).$$

   Comme presque sûrement $a_0 \neq 0$ et $|a_k| \quad k$ pour k assez grand, la variable Y est définie. Reste à prouver qu'elle est intégrable :

   - La variable $\quad \ln|a_0|$ est intégrable, puisque l'intégrale $\int_{\mathbf{R}} \quad \ln|t| e^{\ \ t^2/2} \, dt$ converge.
   - Posons $W = \ln \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k^2}{k!} (2M^2)^k \right)$. Si $W < 0$, alors $W \geqslant \ln|a_0|$, donc $W \quad = \quad \min(W,0)$ est intégrable.

Par ailleurs, si $W \geqslant 0$, alors par l'inégalité $\ln(x) \quad x$ on a $W^+ \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k^2}{k!}(2M^2)^k$. Or, comme l'espérance de a_k^2 est égale à 1, la série $\sum \quad \left(\frac{a_k^2}{k!}(2M^2)^k\right)$ converge. Comme L^1 est complet, la variable aléatoire $\sum \frac{a_k^2}{k!}(2M^2)^k$ est intégrable.
Il en est donc de même de W^+.
Au final, la variable aléatoire Y est intégrable. Le théorème de convergence dominée permet alors d'affirmer que $\quad (Z_{[a,b]}(S_n)) \to \quad (Z_{[a,b]}(f))$.

D'après la question III.A, $\quad (Z_{[a,b]}(S_n)) = \frac{1}{\pi}\int_a^b ||\gamma_n'(t)||\,\mathrm{d}t$, où $\gamma_n(t)$ est la projection sur S^n de $v_n(t) = \left(1, \frac{t}{\sqrt{1\,!}}, \ldots, \frac{t^n}{\sqrt{n\,!}}\right)$. On a, avec les notations de III.A,

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= \ln \sum_{k=0}^{n} \frac{(xy)^k}{k\,!} \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\sum_{k=0}^{n\ \ 1} \frac{(xy)^k}{k\,!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(xy)^k}{k\,!} + xy \sum_{k=0}^{n\ \ 2} \frac{(xy)^k}{k\,!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(xy)^k}{k\,!} \quad xy \sum_{k=0}^{n\ \ 1} \frac{(xy)^k}{k\,!} \cdot \sum_{k=0}^{n\ \ 1} \frac{(xy)^k}{k\,!}}{\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(xy)^k}{k\,!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(xy)^k}{k\,!}\right)^2} \\
||\gamma_n'(t)||^2 &= \frac{f_{n\ \ 1}(t) f_n(t) + t^2 f_{n\ \ 2}(t) f_n(t) \quad t^2 f_{n\ \ 1}^2(t)}{f_n^2(t)}
\end{aligned}$$

où $f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k}}{k\,!}$. Comme $f_n(t)$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers e^{t^2}, $||\gamma_n'(t)||^2$ converge uniformément vers 1. D'où

$$(Z_{[a,b]}(f)) = \frac{b \quad a}{\pi}.$$

IV.C - Cas de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.

De même qu'en IV.B.1, on vérifie que presque sûrement, $\frac{1}{k^2} \quad |a_k| \quad k^2$ pour k assez grand, et ainsi le rayon de la série est presque sûrement 1.

Le fait que f et f' ont presque sûrement un nombre fini de zéros et aucun zéro commun se prouve de la même façon qu'en IV.B, ainsi que la convergence presque sûre de $Z_{[a,b]}(S_n)$ vers $Z_{[a,b]}(f)$.

Si $[a,b] \subset [\quad \rho^2, \rho^2]$, la majoration $\quad Z_{[a,b]}(S_n) \quad \frac{1}{\ln \frac{1}{\rho}} \cdot \ln \frac{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \rho^{2k}}}{|a_0|}$ permet d'utiliser la convergence dominée.

La convergence dans L^1 de $\sum_k a_k^2 \rho^{2k}$ provient des mêmes arguments que tout à l'heure. On a alors

$$Z_{[a,b]}(S_n)\big) = \frac{4}{\pi} \int_a^b \sqrt{\frac{1}{(1-t^2)^2} - \frac{(n+1)^2 t^{2n}}{(1-t^{2n+2})^2}}\, \mathrm{d}t$$

qui tend par convergence dominée – l'intégrande étant majoré par $\sqrt{\dfrac{1}{(1-t^2)^2}}$ – vers

$$Z_{[a,b]}(f)\big) = \frac{4}{\pi} \int_a^b \frac{1}{1-t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{4}{\pi}(\operatorname{argth} b - \operatorname{argth} a).$$

Références

[1] Edelman A, Kostlan E. *How many zeros of a random polynomial are real ?*, Bull. Am. Math. Soc. 32 (1995), pp 1-37.

[2] Kac M, *On the average number of real roots of a random algebraic equation*, Bull. Am. Math. Soc. 49 (1943), pp 314-320.

[3] Kac M, *On the average number of real roots of a random algebraic equation (II)*, Bull. Am. Math. Soc. 50 (1949), pp 390-408.

[4] Mignotte M., *Mathématiques pour le calcul formel*, PUF, 1989

Rapport des correcteurs

Le problème portait sur une réponse apportée dans les années 40 au problème suivant : déterminer l'espérance du nombre de racines réelles d'un polynôme aléatoire dont les coefficients suivent des lois gaussiennes indépendantes. La partie III déterminait cette espérance comme l'aire d'une portion de la sphère S^n parcourue par un "équateur" mobile. La partie II reliait cette dernière quantité à la longueur d'une courbe tracée sur la sphère, et la partie I était dévolue à l'obtention d'un équivalent du nombre de zéros réels d'un polynôme aléatoire de degré n.

Le sujet avait l'ambition de proposer une vaste couverture du programme d'analyse. Il était certes long, mais a été presque terminé par quatre candidats remarquables.

La première partie du problème ne posait pas de problème de compréhension, mais nécessitait une certaine solidité technique sur les outils de calcul du premier cycle. La plupart des admissibles ont pu y exprimer leurs qualités mathématiques. Citons quelques points que les correcteurs ont noté :

- Dans la question 2, l'utilisation de la quantité conjuguée pour contrôler l'écart entre deux racines carrées n'apparait que dans un faible nombre de copies.
- Il y avait plusieurs inégalités globales (sur un intervalle) à démontrer, pour lesquelles de nombreux candidats utilisent des développements limités, alors que ces derniers ne peuvent apporter qu'une information locale.
- Lors de calculs d'équivalents, les constantes sont régulièrement supprimées, ce qui ne manque pas de surprendre les correcteurs.

La deuxième partie ne proposait pas de grandes difficultés, hormis la question B2, qui pouvait sans difficulté être admise pour la suite. Les candidats ont dans l'ensemble réalisé des dessins de bonne qualité pour soutenir leur propos de façon pertinente. Le principal écueil résidait dans les questions de théorie de la mesure. Rares sont les candidats qui ont compris l'intérêt du cône engendré pour définir une mesure uniforme sur la sphère $S^{n\ 1}$. Nombreux sont ceux qui considèrent régulièrement des mesures de Lebesgue de parties de la sphère, or celle-ci est malheureusement de mesure de Lebesgue nulle.

La troisième partie ne comportait somme toute que 4 questions relatives au calcul des probabilités, questions assez simples qui ont cependant été rarement bien traitées. Dans la première question, la majorité des candidats a confondu $\mathbb{P}\left(\dfrac{a}{||a||} \in A\right)$ avec $\mathbb{P}(a \in A)$, et ont été conduits à calculer une intégrale sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Rappelons que pour une variable X de densité f sur un ensemble E,

$$\mathbb{P}(g(X) \in B) = \int_E \mathbf{1}_{g(x)\in B} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

résultat qui ne semble pas maîtrisé par les candidats.

La partie III.B, souvent traitée, a donné lieu à de très nombreuses erreurs, liées à la gestion de la composition des fonctions polynomiales. Ainsi, par exemple, dans la question 1b, les candidats pensent obtenir $A.L_\theta(P)$, alors qu'ils tombent sur $L_\theta(A.P)$, beaucoup moins pratique pour résoudre l'équation différentielle.

Enfin, la partie IV proposait des questions nettement plus difficiles, avec des extensions des résultats précédents aux séries entières aléatoires et à l'étude de leurs zéros. Cette partie a servi à départager les meilleurs candidats.