Université de Rennes
Jürgen Angst

Probabilités pour l'agrégation (tronc commun)

Le programme officiel du tronc commun pour 2024

Voici tout d'abord la liste des notions de théorie des probabilités et de statistiques qui figurent au programme officiel du tronc commun pour la session 2024.

1. *Définition d'un espace probabilisé.*
   - *Événements, tribus, mesure de probabilité. Indépendance d'événements et de tribus. Loi du 0-1 de Kolmogorov, lemmes de Borel–Cantelli. Probabilités conditionnelles. Formule des probabilités totales.*
2. *Variables aléatoires, loi d'une variable aléatoire*
   (a) *Loi discrète, loi absolument continue. Fonction de répartition et densité. Loi conjointe de variables aléatoires, indépendance de variables aléatoires. Fonction de répartition et densité. Loi conjointe de variables aléatoires, indépendance de variables aléatoires. Espérance d'une variable aléatoire à valeurs positives ou complexes, théorème de transfert, moments. Variance d'une variable aléatoire réelle. Exemples de lois : loi de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson, uniforme, exponentielle, de Gauss.*
   (b) *Fonction caractéristique. Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}$*. Application aux sommes de variables aléatoires indépendantes.*
3. *Convergences de suites de variables aléatoires*
   (a) *Convergence en probabilité, dans* L^p*, presque sûrement, en loi. Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé–Tchebychev, théorème de Lévy.*
   (b) *Loi faible et loi forte des grands nombres. Théorème central limite.*
4. *Statistiques*
   (a) *Statistiques descriptives univariées : indicateurs de position et indicateurs de dispersion. Représentations graphiques de données.*
   (b) *Série statistique à deux variables quantitatives, nuage de points associé. Coefficient de corrélation. Droite de régression des moindres carrés.*
   (c) *Estimation ponctuelle. Estimation par intervalle de confiance.*

Les leçons explicitement concernées en 2023

- 261 - Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.
- 262 - Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Ex et applications.
- 264 - Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.
- 266 - Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.

Ce que dit le rapport du jury 2022

Leçon 152 : Déterminant. Exemples et applications.
[...] Parmi les autres applications possibles, on peut penser aux déterminants de Gram (permettant des calculs de distances), au déterminant jacobien (utile en calcul intégral et en probabilités), à l'utilisa- tion du déterminant en géométrie (coordonnées barycentriques, colinéarité, etc.) ou encore à son rôle dans l'étude des formes quadratiques. Il est bienvenu d'illustrer la continuité du déterminant par une application. On pourra aussi s'intéresser à sa différentielle.

Leçon 158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
Une discussion de la décomposition de Cholesky, qui a de nombreuses applications [...], par ex. en probabilités (construction d'un vecteur gaussien de matrice de covariance donnée à partir d'un vecteur gaussien de matrice de covariance identité), peut mériter sa place dans cette leçon.

Leçon 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.
[...] Des candidats ayant un bagage probabiliste pourront explorer le champ des permutations aléatoires, en présentant des algorithmes pour générer la loi uniforme sur le groupe symétrique S_n et analyser certaines propriétés de cette loi uniforme (points fixes, cycles, limite...)

Leçon 191 : Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.
[...] Comme dans le cas des autres leçons, il est tout à fait bienvenu de chercher à illustrer cette leçon par des exemples issus de l'analyse, des probabilités, de la statistique (par exemple en évoquant l'interprétation géométrique de l'analyse en composantes principales),

Leçon 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
[...] La convexité est évidemment également une source inépuisable d'inégalités, dans divers domaines y compris les probabilités. [...] Une autre piste est l'étude et l'utilisation des fonctions de répartition en probabilités. [...]

Leçon 234 : Espaces $\mathbb{L}^p$
Par ailleurs, des exemples issus des probabilités peuvent tout à fait être mentionnés.

Leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
[...] La théorie des probabilités fournit également un champ d'applications fertile.

Leçon 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
[...] Enfin, la notion de fonction caractéristique en probabilités a toute sa place dans cette leçon et fournit un riche champ d'applications.

Leçon 250 : Transformation de Fourier. Applications.
[...] Bien entendu, les fonctions caractéristiques et leurs applications en probabilités ont toute leur place dans cette leçon [...].

Leçon 261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.
Cette leçon concerne bien entendu les diverses lois du programme, leurs interactions et leurs propriétés de stabilité, et appelle donc des illustrations concrètes. Le théorème de transfert, qui calcule $\mathbb{E}[f(X)]$ à l'aide de la loi de X, les vecteurs aléatoires à coordonnées indépendantes, ainsi que la caractérisation de la loi par la fonction génératrice ou caractéristique, sont au coeur de cette leçon. Les candidats pourront également aborder la convergence en loi en l'illustrant d'exemples variés. Les candidats aguerris pourront aborder le problème de la caractérisation de la loi par les

moments, les vecteurs gaussiens, le théorème central limite dans $\mathbb{R}^d$, les chaînes de Markov, les processus de Poisson.

Leçon 262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.
Les liens entre les différents modes de convergence d'une suite de variables aléatoires devront être illustrés par des exemples et contre-exemples variés. Les théorèmes de convergence du programme (lois des grands nombres, théorème central limite) sont bien sûr au coeur de cette leçon, et la preuve de la loi forte des grands nombres, éventuellement sous des hypothèses de confort, pourra être présentée. Les candidats aguerris pourront aborder la convergence des séries de variables aléatoires indépendantes, les marches aléatoires, la loi du logarithme itéré, le théorème central limite dans $\mathbb{R}^d$, les chaînes de Markov, les lois stables ou infiniment divisibles.

Leçon 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.
Les techniques spécifiques aux variables discrètes, notamment à valeurs entières (caractérisation de la convergence en loi, notion de fonction génératrice) devront être mises en évidence et illustrées par des exemples variés. La marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ ou le processus de Galton–Watson fournissent des exemples à la fois élémentaires et riches. Les candidats aguerris pourront aborder la loi du logarithme itéré (par exemple dans le cas de la marche aléatoire symétrique), les chaînes de Markov, les processus de Poisson.

Leçon 265 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.
[...] Il s'agit plutôt de proposer un choix pertinent de fonctions spéciales rencontrées dans divers domaines des mathématiques (fonction Γ en analyse complexe, densités de lois variées en probabilités, fonctions ζ, η ou séries L en théorie des nombres, etc.) avec des applications significatives

Leçon 260 : Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.
Le jury attend des candidats qu'ils donnent la définition des moments centrès, qu'ils rappellent les implications d'existence de moments (décroissance des $\mathbb{L}^p$). Le candidat peut citer mais doit surtout savoir retrouver rapidement les espérances et variances de lois usuelles, notamment Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson, exponentielle, normale. La variance de la somme de variables aléatoires indépendantes suscite souvent des hésitations. Les inégalités classiques (de Markov, de Bienaymé-Chebyshev, de Jensen et de Cauchy–Schwarz) pourront être données, ainsi que les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème central limite). La notion de fonction génératrice des moments pourra être présentée ainsi que les liens entre moments et fonction caractéristique. Pour aller plus loin, le comportement des moyennes empiriques pour une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées n'admettant pas d'espérance pourra être étudié. Pour les candidats suffisamment à l'aise avec ce sujet, l'espérance conditionnelle pourra aussi être abordée.

Leçon 261 : Fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Exemples et applications.
Les candidats pourront présenter l'utilisation de la fonction caractéristique pour le calcul de lois de sommes de variables aléatoires indépendantes et faire le lien entre la régularité de la fonction caractéristique et l'existence de moments. Le candidat doit être en mesure de calculer la fonction caractéristique des lois usuelles. Les liens entre la fonction caractéristique et la transformée de Fourier sont des attendus du jury. Le jury attend l'énoncé du théorème de Lévy, que les candidats en comprennent la portée, et son utilisation dans la démonstration du théorème central limite. Pour aller plus loin, des applications pertinentes de ces résultats seront les bienvenues. Enfin, la transformée de Laplace pourra être utilisée pour établir des inégalités de grandes déviations.

Leçon 262 : Mode de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.
Les implications entre les divers modes de convergence, ainsi que les réciproques partielles doivent être connues. Des contre-exemples aux réciproques sont attendus par le jury. Les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème central limite) doivent être énoncés. On peut par ailleurs exiger de connaître au moins l'architecture des preuves. L'étude de maximum et minimum de n variables aléatoires indépendantes et de même loi peut nourrir de nombreux exemples. Pour aller plus loin, les candidats pourront s'intéresser au comportement asymptotique de marches aléatoires (en utilisant par exemple le lemme de Borel–Cantelli, les fonctions génératrices,...) ou donner des inégalités de grandes déviations. Enfin, les résultats autour des séries de variables aléatoires indépendantes comme le théorème de Kolmogorov peuvent tout à fait se placer dans cette leçon.

Leçon 263 : Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.
Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire à densité et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Certains candidats trouveront utile de mentionner le théorème de Radon-Nikodym, même s'il ne s'agit pas de faire un cours abstrait sur l'absolue continuité. Le lien entre indépendance et produit des densités est un outil important. Le lien entre la somme de variables indépendantes et la convolution de leurs densités est trop souvent oublié. Ce résultat général peut être illustré par des exemples issus des lois usuelles. Les candidats pourront expliquer comment fabriquer n'importe quelle variable aléatoire à partir d'une variable uniforme sur $[0,1]$. Les candidats proposent parfois en développement la caractérisation de la loi exponentielle comme étant l'unique loi absolument continue sans mémoire : c'est une bonne idée de développement de niveau élémentaire pour autant que les hypothèses soient bien posées et toutes les étapes bien justifiées. On pourra pousser ce développement à un niveau supérieur en s'intéressant au minimum ou aux sommes de telles lois. La preuve du théorème de Scheffé sur la convergence en loi peut faire l'objet d'une partie d'un développement. La loi de Cauchy offre encore des idées de développements intéressants (par exemple en la reliant au quotient de deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale centrée). Pour aller plus loin, les candidats pourront aborder la notion de vecteurs gaussiens et son lien avec le théorème central limite. On peut aussi proposer en développement le théorème de Cochran.

Leçon 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.
Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Le lien entre variables aléatoires de Bernoulli, binomiale et de Poisson doit être discuté. Il peut être d'ailleurs intéressant de mettre en avant le rôle central joué par les variables aléatoires de Bernoulli. Les techniques spécifiques aux variables discrètes, notamment à valeurs entières, devront être mises en évidence, comme par exemple la caractérisation de la convergence en loi, la notion de fonction génératrice. Pour aller plus loin, le processus de Galton-Watson peut se traiter intégralement à l'aide des fonctions génératrices et cette voie a été choisie par plusieurs candidats : cela donne un développement de très bon niveau pour ceux qui savent justifier les étapes délicates. Pour aller beaucoup plus loin, les candidats pourront étudier les marches aléatoires, les chaînes de Markov à espaces d'états finis ou dénombrables, les sommes ou séries de variables aléatoires indépendantes.

On peut parler de probabilités dans toutes les leçons !

— 101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
Marche aléatoire sur les groupes, espaces homogènes, vecteurs gaussiens.

— 102 Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.
Racines de polynômes aléatoires, marche aléatoire sur $\mathbb{S}^1$.

— 103 Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et quotients. App.
Permutations aléatoires. Vecteurs gaussiens.

— 104 Groupes finis. Exemples et applications.
Transformée de Fourier, représentations, phénomène de cut-off.

— 105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
Marche aléatoire. Dérangements, cycles d'une permutation uniforme, etc.

— 106 Groupe linéaire d'un e.v de dim. finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.
Vecteurs gaussiens, complément de Schur

— 108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
Marche aléatoire avec une mesure chargeant les générateurs, graphe de Cayley.

— 120 Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, Exemples et applications.
Marche aléatoire, mélange, simulation de v.a. uniforme.

— 121 Nombres premiers. Applications.
Crible de Hawkins, théorème des nombres premiers associé.

— 123 Corps finis. Applications.
Théorème de Kakeya sur les corps finis.

— 141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Ex. et applications.
Points critiques de polynômes aléatoires à racines i.i.d.

— 144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Ex. et applications.
Zéros de polynômes aléatoires, spectre matrice aléatoire, théorème de Wigner.

— 148 Exemples de décomposition de matrices.
Vecteurs gaussiens, Perron–Frobenius, etc.

— 149 Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés. Applications.
Perron–Frobenius, convergence chaînes de Markov, vitesse.

— 151 Dim d'un espace vectoriel (dimension finie). Rang. Exemples et applications.
Espérance conditionnelle gaussienne, théorème de Cochran.

— 152 Déterminant. Exemples et applications.
Vecteurs gaussiens. Proc. déterminantaux, matrices aléatoires, théorème de Wigner.

— 153 Polynômes d'endo. en dim. finie. Réduction d'un endo. en dim. finie. Applications.

— 155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
Réduction des matrices stochastiques, Perron-Frobenius et conséquences en proba.

— 156 Exponentielle de matrices. Applications.
Chaînes de Markov, mesure invariante, Perron–Frobenius, Algorithme PageRank etc.

— 158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
Matrices de covariance, Bochner-Herglotz, vecteurs gaussiens, théorème de Wigner.

— 161 Distances dans un espace affine euclidien. Isométries.
Espérance conditionnelle gaussienne.

— 162 Systèmes d'éq. lin. ; op. élém., aspects algorithmiques et conséquences théoriques.
Chaînes de Markov, probabilités et temps moyen d'absorption.

— 181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
Espérance, permutations comme points extrémaux des matrices stoch. (Krein-Milman).

— 190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.
Toutes les probabilités discrètes, par ex cycles des permutation uniformes, etc.

— 201 Espace de fonctions. Exemples et applications.
Espaces L^p *en proba, fonctions de répartition, Dini, etc.*

— 203 Utilisation de la notion de compacité.
Arzela–Ascoli, critères de tension pour les mesures de proba.

— 205 Espaces complets. Exemples et applications.
Espaces L^p *en proba, variation totale.*

— 206 Exemples d'utilisation de la dimension finie en analyse.
Espérance conditionnelle gaussienne.

— 208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples
Théorème de Radon–Nikodym.

— 209 Approximation par des fonctions régulières. Ex et applications.
Théo. de Bernstein (+version trigo). Zéros des polynômes trigo. aléatoires.

— 213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
Construction de l'espérance cond. $\mathbb{L}^2$, *mouvement brownien, Radon-Nikodym.*

— 215 Applications différentiables [...]. Exemples et applications.
Changement de variables, Jacobien, identifiation de lois.

— 219 Extrema : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.
Maximum de vraisemblance, efficacité. Arbres aléatoires.

— 221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équa. diff. linéaires. Ex. et appli.
Caractérisation de la gaussienne par la méthode Stein, preuve TCL.

— 223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.
Relations liminf et limsup de suites et d'ensembles, Borel–Cantelli.

— 224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.
TLC via Fourier, via la méthode des moments, combinatoire asymp, Berry–Esseen.

— 226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence.
Chaînes de Markov, martingales.

— 228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Ex. et appli.
Mouvement brownien, régularité des fonctions caractéristiques.

— 229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
Inégalité de Jensen, lemmes de Dini, Glivenko–Cantelli

— 230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes [...].
Théorème des trois séries de Kolmogorov, Berry–Esseen.

— 234 Fonctions et espaces de fonction Lebesgue-intégrables.
Les espaces L^p *en proba, uniforme intégrabilité, convergence des martingales.*

— 235 Problèmes d'inversion en analyse.
Uniforme intégrabilité, CNS convergence dominée, TLC.

— 236 Illustrer par des ex. quelques méth. de calcul d'int. de fonctions d'une ou plusieurs var.
Méthode de Monte-Carlo, méthode de rejet.

— 239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Ex et applications.
Lois Gamma, Beta, gaussiennes, fonction caractéristique de la gaussienne par dérivation.

— 241 Suites et séries de fonctions. Exemples et applications.
Suites de variables aléatoires, TLC, trois séries de Kolmogorov.

— 243 Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
Problème des moments, fonctions génératrices, Galton–Watson, etc.

— 245 Fonctions d'une variable complexe, exemples et applications.
Polynômes aléatoires, fonctions caractéristiques,

— 246 Série de Fourier, exemples et applications.
Polynômes trigo aléatoires et leurs zéros.

— 250 Transformation de Fourier. Applications.
Fonctions caractéristiques, Théorème de Lévy, TLC.

— 253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.
Perron–Frobenius via pt fixe de Brouwer, Jensen, inégalités de concentration (Hoeffding).

— 261, 262, 264, 266 : ce sont les leçons de proba !

— 266 Exemples d'études et d'application de fonctions usuelles et spéciales.
Densité usuelles, fonctions gaussiennes/Gamma/Beta et lois correspondantes.

— 267 Exemples d'utilisation de courbes en dimension 2 ou supérieure.
Nombre de zéros à la Edelman–Kostlan, évolution de Lowner, SLE.

Exemples de questions auxquelles vous devez savoir répondre.

— Quelle est la définition d'une tribu ? D'une classe monotone ?

— Que doit vérifier une classe monotone pour être une tribu ?

— Une union/intersection de tribus est-elle une tribu ?

— Quel est l'énoncé du lemme des classes monotones ?

— Quelles sont les définitions de $\liminf$ et $\limsup$ d'ensembles ?

— Qu'est ce que la loi d'une variable aléatoire ?

— Quelles sont les propriétés des fonctions de répartition ?

— Pourquoi les fonctions de répartitions caractérisent les lois ?

— Qu'est-ce qu'une loi à densité ?

— Quelles sont les interprétations des lois usuelles ?

— Quels sont les liens entre fonctions de répartition et densités ?

— Que dire des points de discontinuité d'une fonction de répartition ?

— Y'a-t-il des lois qui ne sont ni discrètes, ni à densité ?

— Quelle est la définition de l'indépendance (mutuelle) de tribus, de variables aléatoires ?

— Comment se traduit sur sa loi l'indépendance des marginales d'un vecteur aléatoire ?

— Que dit le lemme de Borel–Cantelli ? Comment le montre-t-on ?

— Quelle est la loi du zéro-un de Kolmogorov ?

— Que dire de la loi d'une somme de deux variables indépendantes ?
— Quelles familles de lois sont stables par convolution ?
— Que sont l'espérance, les moments, d'une variable aléatoire ?
— Quels sont les liens entre espérance/moments et fonction de répartition ?
— Quelles sont les définitions de la variance et covariance de variables aléatoires ?
— Que dit le théorème de transfert ?
— Pour des variables discrètes, quelles sont les définitions des lois et espérances conditionnelles ?
— Quelles sont les formules des probabilités totales, de Bayes ? Comment les établir ?
— Que sont et comment établir les inégalités de Markov, Tchebytchev ?
— Les moments caractérisent-ils la loi ?
— Pour quelles classes de fonctions f les espérances $\mathbb{E}[f(X)]$ caractérisent la loi de X ?
— Pourquoi les fonctions caractéristiques caractérisent les lois ?
— Quels sont les liens entre fonctions caractéristiques et moments ?
— Que dire la fonction caractéristique d'une somme de variables indépendantes ?
— Qui est et comment expliciter la fonction caractéristique d'une gaussienne ?
— Qu'a de particulier la loi gaussienne vis à vis de la transformée de Fourier ?
— Que dit la formule d'inversion de Fourier ?
— Pour la fonction génératrice d'une variable (dans $\mathbb{N}$) caractérise sa loi ?
— Comment minorer le rayon de convergence d'une fonction génératrice ?
— Qui sont les modes de convergences usuels de variables aléatoires ?
— Comment s'articulent ces modes ? Exemples et contre-exemples ?
— Qu'une qu'une famille uniformément intégrable de variables aléatoires ?
— Quelle est la loi des évènements rares ? Comment la montre-t-on ?
— Quel est l'énoncé de la loi des grands nombres ? Comment l'établir ?
— Quel est l'énoncé du théorème limite central ? Comment l'établir ?
— Avez-vous en tête des exemples d'applications de la LGN et du TLC ?
— Que sont les médianes, quartiles et quantiles d'une famille de données numériques ?
— Que sont les moyenne et variance et covariance empiriques ?
— Comment calculer la droite de régression des moindres carrés ?
— Qu'est ce qu'un estimateur ? Que signifie qu'il est consistant ?
— Comment mesurer son efficacité ?
— Qu'est-ce qu'un intervalle de confiance ? asymptotique ?
— Comment relier la loi du chi-deux à celle d'un vecteur gaussienn standard ? d'une loi Gamma ?