Formules intégrales pour le comptage des zéros

Ce document a pour but de s'entrainer à l'écrit d'analyse de l'agrégation externe de mathématiques. Étant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, on notera

$$N(f, [a, b]) := \#\{x \in [a, b],\ f(x) = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

le nombre de zéros de f dans l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On cherche en particulier à exhiber des formules intégrales pour $N(f, [a, b])$. On dira qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est non-dégénérée si elle n'a pas de zéro double, i.e. si

$$f(x) = 0 \Longrightarrow f'(x) \neq 0.$$

Si f est une telle fonction de classe C^1 non-dégénérée et $\emptyset \neq [a, b] \subset \mathbb{R}$, on pose

$$\varepsilon_{[a,b]} := \inf_{x \in [a,b]} |f(x)| + |f'(x)| > 0.$$

Exercice 1 (Formule de Kac–Rice)
Dans tout l'exercice, f est une fonction de classe C^1 non-dégénérée et $\emptyset \neq [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

1. *Montrer que f a un nombre fini de zéros dans $[a, b]$.*
2. *Montrer que si $0 < \varepsilon < \varepsilon_{[a,b]}$ et si $f(a)f(b) \neq 0$, alors sur l'ouvert $\{x,\ |f(x)| < \varepsilon\}$, on a*

$$\int_a^b |f'(x)| \mathbb{1}_{|f(x)| < \varepsilon} dx = 2\varepsilon \times N(f, [a, b]).$$

3. *En déduire la formule de Kac–Rice*

$$N(f, [a, b]) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b |f'(x)| \mathbb{1}_{|f(x)| \leq \varepsilon} dx. \qquad (\star)$$

4. *Montrer que si f a N zéros et K points critiques dans $[a, b]$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b |f'(x)| \mathbb{1}_{|f(x)| \leq \varepsilon} dx \leq N + 2K.$$

Exercice 2 (Lemme de Bulinskaya)
Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on considère une fonction aléatoire $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On suppose que les variables aléatoires $f(t)$ ont des densités $p_{f(t)}$ uniformément majorées, i.e.

$$\sup_{\substack{t \in [a,b] \\ x \in \mathbb{R}}} p_{f(t)}(x) \leq C < +\infty.$$

L'objectif est d'établir que f est alors presque sûrement non-dégénérée (lemme de Bulinskaya). On note $T_0 = T_0(\omega) := \{t \in [a, b],\ f(t) = 0 \text{ et } f'(t) = 0\}$ l'ensemble (aléatoire) des zéros doubles.

1. *Si $w_{f'}([a, b], \delta)$ désigne le module de continuité de f' de pas δ, montrer que si $|t - s| \leq \delta$ alors*

$$\mathbb{P}(\{T_0 \cap [s, t] \neq \emptyset\} \cap \{w_{f'}([a, b], \delta) \leq \varepsilon\}) \leq \mathbb{P}(|f(s)| \leq \delta\varepsilon)$$

2. *En découpant convenablement l'intervalle $[a, b]$, en déduire que*

$$\mathbb{P}(\{T_0 \neq \emptyset\}) = 0.$$

Exercice 3 (Zéros réels des polynômes trigonométriques aléatoires)
On considère un polynôme trigonométrique aléatoire de degré n

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \quad x \in \mathbb{R},$$

où les coefficients (a_k) et (b_k) sont des variables gaussiennes centrées réduites, toutes indépendantes, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

1. *Quelle est la loi du couple $(f_n(x), f_n'(x))$? Dépend-elle de x ?*
2. *Montrer que les fonctions f_n sont presque sûrement non-dégénérées.*
3. *À partir de la formule de Kac–Rice (formule $(\star)$ de l'exercice 1), déterminer le nombre moyen de zéros de f_n, i.e $\mathbb{E}[N(f_n, [a,b])]$. Quel est son comportement asymptotique lorsque n tend vers l'infini ? Interpreter.*

Exercice 4 (Une formule non-asymptotique)
Comme plus haut, f est une fonction de classe C^1 non-dégénérée et $\emptyset \neq [a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle. On pose $\eta_f(x) := \sqrt{f(x)^2 + f'(x)^2}$. Pour $\varepsilon > 0$, on définit la fonction ϕ_ε par

$$\phi_\varepsilon(x) := \begin{cases} -1 & si \ x \leq -\varepsilon, \\ x/\varepsilon & si \ -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon, \\ 1 & si \ x \geq \varepsilon. \end{cases}$$

On remarquera que pour $x \neq 0$, lorsque ε tend vers zéro, $\phi_\varepsilon(x)$ converge vers $\operatorname{sign}(x)$ le signe de x et que pour presque tout x, $\phi_\varepsilon'(x) = \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$.

1. *Montrer que l'on a aussi*
$$N(f,[a,b]) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b \frac{f'(x)^2}{\eta_f(x)} \mathbb{1}_{|f(x)|\leq\varepsilon} dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2} \int_a^b \frac{f'(x)}{\eta_f(x)} \left(\phi_\varepsilon \circ f(x)\right)' dx.$$
2. *Dans le cas où f est $2\pi-$périodique, montrer que l'on a alors*
$$N(f,[0,2\pi]) = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(f''(x)f(x) - f'(x)^2\right) \frac{|f(x)|}{\eta_f(x)^3} dx.$$

Exercice 5 (Une généralisation)
Soit F une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = -1, \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

1. *Dans le cas où f est $2\pi-$périodique, montrer que l'on a plus généralement*
$$N(f,[0,2\pi]) = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} F'\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' dx.$$
2. *Montrer que l'on a en particulier*
$$N(f,[0,2\pi]) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f''(x)f(x) - f'(x)^2}{f(x)^2 + f'(x)^2} dx.$$
3. *Donner une formule analogue lorsque f n'est pas périodique.*