Autour de l'équirépartition

Ce document a pour but de s'entrainer à l'écrit d'analyse et probabilités. Étant donné un réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière et $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ sa partie fractionnaire. On dit qu'une suite de réels $(x_n)_{n\geq 1}$ est *équirépartie modulo* 1 si pour tout $0 \leq a \leq b \leq 1$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{Card}\{k \in [\![1;n]\!],\ \{x_k\} \in [a,b]\}}{n} = b - a.$$

On commence par rappeler les équivalences classiques suivantes, l'équivalence entre les points $i)$ et $iii)$ étant connue sous le nom de critère de Weyl.

Théoreme : Étant donnée une suite de réels $(x_n)_{n\geq 1}$, les assertions suivantes sont équivalentes.

i) La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie modulo 1.

ii) Pour toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_0^1 f(x)dx.$$

iii) Pour tout entier $p > 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p x_k} = 0.$$

Exercice 1 *(Preuve du critère de Weyl)*

1. *Montrer que $i)$ implique $ii)$.*
   Indice : on pourra vérifier que $ii)$ est vraie pour les fonctions en escalier, puis raisonner par densité.
2. *Montrer que $ii)$ implique $i)$.*
   Indice : on pourra encadrer l'indicatrice entre deux fonctions continues bien choisies.
3. *Montrer que $ii)$ implique $iii)$.*
4. *Montrer que $iii)$ implique $ii)$.*
   Indice : on pourra raisonner par densité via le théorème de Weierstrass.

Exercice 2 *(Équirépartition et écriture en base 10)*
Dans cette partie, on s'intéresse à l'équirépartition des décimales de 2^n en base 10.

1. *Montrer que* $\log(2)$ *est irrationnel, où* $\log$ *désigne le logarithme en base 10.*
2. *Montrer que si α est irrationnel, alors la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de terme général $x_n = n\alpha$ est équirépartie modulo 1.*

Étant donné un entier $n \geq 1$, on désigne par $a_{k(n)}(n)a_{k(n)-1}(n)\ldots a_1(n)$ l'écriture en base 10 de 2^n, où $k(n)$ est le nombre de décimales et $a_j(n) \in \{0,1,\ldots,9\}$ pour $1 \leq j \leq k(n)$ et $a_{k(n)}(n) \neq 0$

$$2^n = \sum_{j=1}^{k(n)} a_j(n) 10^{j-1}.$$

3. *Pour $n \geq 1$, on pose $a_n := a_{k(n)}(n)$ la première décimale de 2^n et pour $1 \leq j \leq 9$, on considère la proportion*
$$\tau(j,n) := \frac{\mathit{Card}\,(k \in \{1,\ldots,n\},\ a_k = j)}{n}.$$
   Montrer que la limite $\lim_{n\to+\infty} \tau(j,n)$ existe et expliciter cette limite.

Exercice 3 *(Non-équirépartition de la suite $(\log(p_n))_{n\geq 1}$ modulo 1)*
On montre ici que si p_n désigne le $n-$ième nombre premier, alors la suite $(x_n)_{n\geq 1} = (\log(p_n))_{n\geq 1}$ est non-équirépartie modulo 1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_k := \inf\{n,\, p_n > e^k\}, \quad I_{k-\frac{1}{2}} := \inf\{n,\, p_n > e^{k-\frac{1}{2}}\},$$

et

$$S_k := \sum_{n<I_k} \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}\left(\{\log(p_n)\}\right), \quad S_{k-\frac{1}{2}} := \sum_{n<I_{k-\frac{1}{2}}} \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}\left(\{\log(p_n)\}\right).$$

1. *Montrer que $S_k = S_{k-\frac{1}{2}}$.*
2. *Déduire du critère de Weyl et du théorème des nombres premiers que $(\log(p_n))_{n\geq 1}$ est non-équirépartie modulo 1.*

Exercice 4 *(Non-équirépartition de la suite $(\ln(n))_{n\geq 1}$)*
Dans cette deuxième partie, on montre que la suite $(x_n)_{n\geq 1} = (\{\ln(n)\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dense dans $[0,1]$ mais non-équirépartie.

1. *Montrer que la suite $(\{\ln(n)\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dense dans $[0,1]$.*
2. *Soient n dans $\mathbb{N}^*$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1. Établir la formule suivante*
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F(k) = \frac{1}{n}\int_1^n F(t)dt + \frac{1}{n}\int_1^n \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) F'(t)dt + \frac{F(1)+F(n)}{2n}.$$
3. *Montrer qu'il existe une suite complexe $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini et telle que*
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi\ln(k)} = \frac{e^{2i\pi\ln(n)}}{2i\pi+1} + \varepsilon_n.$$
4. *En déduire que la suite $(\ln(n))_{n\geq 1}$ n'est pas équirépartie modulo 1.*
5. *(Un peu plus difficile). Fixons un intervalle $[a,b]$ avec $0 \leq a < b < 1$ (resp. $0 < a < b \leq 1$). Pour $m \geq m_0$ assez grand, on choisit une suite d'entiers $(N_m)_{m\geq m_0}$ de sorte que $e^{m+b} < N_m < e^{m+1}$ (resp. $e^m < N_m < e^{m+a}$). Montrer que la proportion*
$$\frac{\mathit{Card}\{k \in [\![1;N_m]\!],\ \{\ln(k)\} \in [a,b]\}}{N_m}$$
peut converger vers des limites différentes selon le choix de N_m.

Exercice 5 *(Retour sur les polynômes trigonométriques aléatoires)*
On considère la suite de polynômes trigonométriques

$$f_n(x) := \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} a_k \cos(2\pi k x), \quad x \in [0,1], \quad n \geq 1,$$

où la suite $(a_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et telles que $\mathbb{E}[a_k] = 0$ et $\mathbb{E}[a_k^2] = 1$. On considère par ailleurs une variable aléatoire X de loi uniforme sur $[0,1]$, indépendante de la suite $(a_k)_{k\geq 1}$ et on note $\mathbb{E}_X$ l'espérance associée, autrement si h est une fonction mesurable bornée

$$\mathbb{E}_X[h(X)] = \int_0^1 h(x)dx.$$

On veillera à bien distinguer l'espérance $\mathbb{E}$ associée aux coefficients $(a_k)_{k\geq 1}$ et $\mathbb{E}_X$ associée à la variable indépendante X.

1. *Calculer $\mathbb{E}[f_n(X)^2]$, quelle est sa limite lorsque n tend vers l'infini ?*
2. *Calculer $\mathbb{E}_X[f_n(X)^2]$, quelle est sa limite lorsque n tend vers l'infini ?*
3. *(Question plus difficile). Montrer que sous la probabilité $\mathbb{P}$, pour presque toute réalisation de X, la suite $(f_n(X))_{n\geq 1}$ converge en loi vers une gaussienne $\mathcal{N}(0,1/2)$.*