Formules intégrales pour le comptage des zéros

Ce document a pour but de s'entrainer à l'écrit d'analyse et probabilités de l'agrégation externe de mathématiques. Étant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, on notera

$$N(f, [a,b]) := \#\{x \in [a,b],\, f(x) = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

le nombre de zéros de f dans l'intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$. On cherche en particulier à exhiber des formules intégrales pour $N(f,[a,b])$. On dira qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est non-dégénérée si elle n'a pas de zéro double, i.e. si

$$f(x) = 0 \Longrightarrow f'(x) \neq 0.$$

Si f est une telle fonction de classe C^1 non-dégénérée et $\emptyset \neq [a,b] \subset \mathbb{R}$, on pose

$$\varepsilon_{[a,b]} := \inf_{x \in [a,b]} |f(x)| + |f'(x)| > 0.$$

Exercice 1 (Formule de Kac–Rice)
Dans tout l'exercice, f est une fonction de classe C^1 non-dégénérée et $\emptyset \neq [a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

1. *Montrer que f a un nombre fini de zéros dans $[a,b]$.*
   On fixe $0 < \varepsilon < \varepsilon_{[a,b]}$. L'ouvert $\{f < \varepsilon\}$ s'écrit comme une union d'intervalles disjoints qui recouvrent l'ensemble (compact) des zéros. De ce recouvrement, on peut extraire un recouvrement fini. Or dans chacun des intervalles composant ce recouvrement fini, il y a (au plus) un zéros car f y est monotone (f' ne s'annule pas).
2. *Montrer que si $0 < \varepsilon < \varepsilon_{[a,b]}$ et si $f(a)f(b) \neq 0$, alors sur l'ouvert $\{x,\, |f(x)| < \varepsilon\}$, on a*

$$\int_a^b |f'(x)| \mathbb{1}_{|f(x)|<\varepsilon} dx = 2\varepsilon \times N(f, [a,b]).$$

   Comme plus haut, l'ouvert $\{f < \varepsilon\}$ s'écrit comme une union d'intervalles disjoints $\cup_i]a_i, b_i[$. Sur chacun des intervalles $]a_i, b_i[$, f' ne peut s'annuler et est donc de signe constant. De plus, on a naturellement $f(a_i) = \pm\varepsilon$ et $f(b_i) = \mp\varepsilon$ (maximalité) de sorte que

$$\int_{a_i}^{b_i} |f'(x)| \mathbb{1}_{|f(x)|<\varepsilon} dx = 2\varepsilon.$$

   Par le théorème des valeurs intermédiaires, il y a en fait un unique zéro dans chaque intervalle et par suite

$$\int_a^b |f'(x)| \mathbb{1}_{|f(x)|<\varepsilon} dx = \sum_i \int_{a_i}^{b_i} |f'(x)| \mathbb{1}_{|f(x)|<\varepsilon} dx = 2\varepsilon \times N(f, [a,b]).$$

3. *En déduire la formule de Kac–Rice*

$$N(f,[a,b]) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon}\int_a^b |f'(x)|\mathbb{1}_{|f(x)|\le\varepsilon}dx. \qquad (\star)$$

D'après ci-dessus, le rapport

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_a^b |f'(x)|\mathbb{1}_{|f(x)|<\varepsilon}dx$$

est constant égale à $N(f,[a,b])$ pour $\varepsilon < \varepsilon_{[a,b]}$.

4. *Montrer que si f a N zéros et K points critiques dans $[a,b]$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_a^b |f'(x)|\mathbb{1}_{|f(x)|\le\varepsilon}dx \le N + 2K.$$

Comme ci-dessus, on raisonne sur le nombre de composantes connexes (intervalles) de l'ensemble ouvert $\{f < \varepsilon\}$, selon que f' s'annule ou non. Précisément, on écrit

$$\{f<\varepsilon\} = \bigcup_{i\in I_1\sqcup I_2}]a_i, b_i[,$$

avec I_1 l'ensemble des indices correspondants à des intervalles où f' ne s'annule pas, et I_2 l'ensemble des indices correspondants à des intervalles où f' s'annule. Sur I_1, le raisonnement de la question 2 s'applique et on a donc

$$\sum_{i\in I_1}\int_{a_i}^{b_i} |f'(x)|\mathbb{1}_{|f(x)|\le\varepsilon}dx = 2\varepsilon N.$$

Par ailleurs, si $i \in I_2$ et si $t_1,\dots,t_{m_i}$ désignent les points critiques de f dans $[a_i,b_i]$, on a

$$\int_{a_i}^{b_i} |f'(x)|\mathbb{1}_{|f(x)|\le\varepsilon}dx \le |f(t_1)-f(a_i)| + |f(b_i)-f(t_{m_i})| \le 2\varepsilon m_i,$$

d'où en sommant sur tous les intervalles

$$\sum_{i\in I_2}\int_{a_i}^{b_i} |f'(x)|\mathbb{1}_{|f(x)|\le\varepsilon}dx \le 2K\varepsilon.$$

Exercice 2 (Lemme de Bulinskaya)

Sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, on considère une fonction aléatoire $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe C^1. On suppose que les variables aléatoires $f(t)$ ont des densités $p_{f(t)}$ uniformément majorées, i.e.

$$\sup_{\substack{t\in[a,b]\\ x\in\mathbb{R}}} p_{f(t)}(x) \le C < +\infty.$$

L'objectif est d'établir que f est alors presque sûrement non-dégénérée (lemme de Bulinskaya). On note $T_0 = T_0(\omega) := \{t\in[a,b],\ f(t)=0 \text{ et } f'(t)=0\}$ l'ensemble (aléatoire) des zéros doubles.

1. *Si $w_{f'}([a,b],\delta)$ désigne le module de continuité de f' de pas δ, montrer que si $|t-s|\leq\delta$ alors*
$$\mathbb{P}(\{T_0\cap[s,t]\neq\emptyset\}\cap\{w_{f'}([a,b],\delta)\leq\varepsilon\})\leq\mathbb{P}(|f(s)|\leq\delta\varepsilon)\leq 2C\delta\varepsilon.$$
Si $\{T_0\cap[s,t]\neq\emptyset\}$, il existe $\alpha\in[s,t]$ tel que $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$. Par le théorême des valeurs intermédiaires, il existe alors $\beta\in[s,\alpha]\subset[s,t]$ tel que
$$f(s)=f(s)-f(\alpha)=(s-\alpha)f'(\beta)=(s-\alpha)(f'(\beta)-f'(\alpha)).$$
En prenant les valeurs absolues, si $\{w_{f'}([a,b],\delta)\leq\varepsilon\}$, il vient alors
$$|f(s)|\leq|s-\alpha||f'(\beta)-f'(\alpha)|\leq\delta\varepsilon.$$
On a donc bien
$$\mathbb{P}(\{T_0\cap[s,t]\neq\emptyset\}\cap\{w_{f'}([a,b],\delta)\leq\varepsilon\})\leq\mathbb{P}(|f(s)|\leq\delta\varepsilon).$$
Par ailleurs,
$$\mathbb{P}(|f(s)|\leq\delta\varepsilon)=\int_{-\delta\varepsilon}^{+\delta\varepsilon}p_{f(s)}(x)dx\leq 2C\delta\varepsilon.$$

2. *En découpant convenablement l'intervalle $[a,b]$, en déduire que*
$$\mathbb{P}(\{T_0\neq\emptyset\})=0.$$
Fixons $\varepsilon>0$ et choisissons $\delta>0$ assez petit de sorte que
$$\mathbb{P}(\{w_{f'}([a,b],\delta)>\varepsilon\})\leq\varepsilon.$$
On découpe alors l'intervalle $[a,b]$ en m sous-intervalles réguliers $[t_j,t_{j+1}]$ de taille δ. On a alors
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{T_0\neq\emptyset\}) &= \mathbb{P}(\{T_0\neq\emptyset\}\cap\{w_{f'}([a,b],\delta)>\varepsilon\})+\mathbb{P}(\{T_0\neq\emptyset\}\cap\{w_{f'}([a,b],\delta)\leq\varepsilon\})\\ &\leq \mathbb{P}(\{w_{f'}([a,b],\delta)>\varepsilon\})+\mathbb{P}(\{T_0\neq\emptyset\}\cap\{w_{f'}([a,b],\delta)\leq\varepsilon\})\\ &\leq \varepsilon+\textstyle\sum_{j=1}^m\mathbb{P}(\{T_0\cap[t_j,t_{j+1}]\neq\emptyset\}\cap\{w_{f'}([a,b],\delta)\leq\varepsilon\})\\ &\leq \varepsilon+\textstyle\sum_{j=1}^m\mathbb{P}(|f(t_j)|\leq\delta\varepsilon)\leq\varepsilon+m\times C\delta\varepsilon\leq\varepsilon+C|b-a|\varepsilon.\end{aligned}$$

Exercice 3 (Zéros réels des polynômes trigonométriques aléatoires)
On considère un polynôme trigonométrique aléatoire de degré n
$$f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx),\quad x\in\mathbb{R},$$
où les coefficients (a_k) et (b_k) sont des variables gaussiennes centrées réduites, toutes indépendantes, définies sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$

1. *Quelle est la loi du couple $(f_n(x), f_n'(x))$? Dépend-elle de x ?*
   Le couple $(f_n(x), f_n'(x))$ est un vecteur gaussien centré (combinaison linéaire de variables gaussiennes indépendantes). On a de plus

$$\mathbb{E}[f_n^2(x)] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)^2 + \sin(kx)^2 = 1,$$

   et en dérivant, on obtient

$$\mathbb{E}[f_n(x)f_n'(x)] = 0.$$

   De la même façon, on a

$$\mathbb{E}[f_n'^2(x)] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2\cos(kx)^2 + k^2\sin(kx)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} =: \alpha_n.$$

   Autrement dit, la loi $(f_n(x), f_n'(x))$ ne dépend pas de x, c'est une loi gaussienne $\mathcal{N}(0,\Gamma)$ avec matrice de covariance $\Gamma = diag(1, \alpha_n)$.

2. *Montrer que les fonctions f_n sont presque sûrement non-dégénérées.*
   On applique le lemme de Bulinskaya établi dans l'exercice 2, les variables $f_n(x)$ sont gaussiennes, de densité commune uniformément majorée

$$p(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

3. *À partir de la formule de Kac–Rice (formule $(\star)$ de l'exercice 1), déterminer le nombre moyen de zéros de f_n, i.e $\mathbb{E}[N(f_n,[a,b])]$. Quel est son comportement asymptotique lorsque n tend vers l'infini ? Interpreter.*
   D'après la question précédente, presque sûrement, la fonction f_n est non-dégénérée. Par la formule de Kac–Rice, on a alors presque sûrement

$$N(f_n,[a,b]) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_a^b |f_n'(x)|\mathbb{1}_{|f_n(x)|\leq\varepsilon}dx.$$

   En prenant l'espérance, il vient

$$\mathbb{E}[N(f_n,[a,b])] = \mathbb{E}\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_a^b |f_n'(x)|\mathbb{1}_{|f_n(x)|\leq\varepsilon}dx\right].$$

   D'après question 4 de l'exercice 1, l'intégrale normalisée $\frac{1}{2\varepsilon}\int_a^b \dots$ est uniformément bornée en la variable ε, puisque le nombre de zéros de f_n et de sa dérivée sont tous les deux bornés par (deux fois) le degré. Par convergence dominée, on peut donc intervertir limite et intégrale de sorte que

$$\mathbb{E}[N(f_n,[a,b])] = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_a^b \mathbb{E}\left[|f_n'(x)|\mathbb{1}_{|f_n(x)|\leq\varepsilon}\right]dx.$$

   D'après la première question de cet exercice, la loi de $(f_n(x), f_n'(x))$ ne dépend pas de x, et par indépendance, on a

$$\mathbb{E}\left[|f_n'(x)|\mathbb{1}_{|f_n(x)|\leq\varepsilon}\right] = \mathbb{E}[|\mathcal{N}(0,\alpha_n)|] \times \mathbb{P}(|\mathcal{N}(0,1)| \leq \varepsilon),$$

et comme $\mathbb{P}(|\mathcal{N}(0,1)| \leq \varepsilon)/2\varepsilon$ converge vers la valeur de la densité en zéro i.e. $1/\sqrt{2\pi}$, on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b \mathbb{E}\left[|f_n'(x)| \mathbb{1}_{|f_n(x)|\leq\varepsilon}\right] dx = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} \times \mathbb{E}[|\mathcal{N}(0,\alpha_n)|] = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \sqrt{\alpha_n},$$

autrement dit

$$\mathbb{E}[N(f_n,[a,b])] = \frac{b-a}{\pi} \times \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6}} \approx \frac{n(b-a)}{\pi\sqrt{3}}.$$

On remarque que les zéros réels s'équi-répartissent en moyenne.

Exercice 4 (Une formule non-asymptotique)
Comme plus haut, f est une fonction de classe C^1 non-dégénérée et $\emptyset \neq [a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle. On pose $\eta_f(x) := \sqrt{f(x)^2 + f'(x)^2}$. Pour $\varepsilon > 0$, on définit la fonction ϕ_ε par

$$\phi_\varepsilon(x) := \begin{cases} -1 & si \;\; x \leq -\varepsilon, \\ x/\varepsilon & si \;\; -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon, \\ 1 & si \;\; x \geq \varepsilon. \end{cases}$$

On remarquera que pour $x \neq 0$, lorsque ε tend vers zéro, $\phi_\varepsilon(x)$ converge vers $\mathrm{sign}(x)$ le signe de x et que pour presque tout x, $\phi_\varepsilon'(x) = \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$.

1. *Montrer que l'on a aussi*

$$N(f,[a,b]) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b \frac{f'(x)^2}{\eta_f(x)} \mathbb{1}_{|f(x)|\leq\varepsilon} dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2} \int_a^b \frac{f'(x)}{\eta_f(x)} \left(\phi_\varepsilon \circ f(x)\right)' dx.$$

Si on pose $\eta_f = \inf_{x\in[a,b]} \eta_f(x) > 0$, on a

$$\left| \frac{|f'(x)|^2}{\sqrt{|f(x)|^2 + |f'(x)|^2}} - |f'(x)| \right| \leq \frac{2f(x)^2}{\eta_f}.$$

et donc si on pose

$$I_\varepsilon := \int_a^b \mathbb{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(f(x)) \frac{|f'(x)|^2}{\sqrt{|f(x)|^2 + |f'(x)|^2}} \frac{dx}{2\varepsilon} - \int_a^b \mathbb{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(f(x)) |f'(x)| \frac{dx}{2\varepsilon},$$

on a

$$|I_\varepsilon| \;\; \leq \int_a^b \mathbb{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(f(x)) \frac{2f(x)^2}{\eta_f} \frac{dx}{2\varepsilon} \leq \frac{(b-a)\varepsilon}{\eta_f}.$$

En particulier, $\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = 0$. Ainsi on a bien

$$N(f,[a,b]) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b \frac{f'(x)^2}{\eta_f(x)} \mathbb{1}_{|f(x)|\leq\varepsilon} dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2} \int_a^b \frac{f'(x)}{\eta_f(x)} \left(\phi_\varepsilon \circ f(x)\right)' dx,$$

la dernière égalité consistant à reconnaitre en $\frac{f'(x)}{\varepsilon}\mathbb{1}_{|f(x)|\leq\varepsilon}$ la dérivée de $\phi_\varepsilon \circ f(x)$.

2. *Dans le cas où f est $2\pi-$périodique, montrer que l'on a alors*

$$N(f,[0,2\pi]) = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(f''(x)f(x) - f'(x)^2\right) \frac{|f(x)|}{\eta_f(x)^3} dx.$$

Dans le cas périodique, une intégration par parties (pas de terme de bord) donne

$$\int_0^{2\pi} \frac{f'(x)}{\eta_f(x)} (\phi_\varepsilon \circ f(x))' \, dx = -\int_0^{2\pi} \left(\frac{f'(x)}{\eta_f(x)}\right)' (\phi_\varepsilon \circ f(x)) \, dx,$$

autrement dit

$$\int_0^{2\pi} \frac{f'(x)}{\eta_f(x)} (\phi_\varepsilon \circ f(x))' \, dx = -\int_0^{2\pi} (\phi_\epsilon \circ f(x)) \frac{f(x)\left(f''(x)f(x) - f'(x)^2\right)}{\eta_f(x)^3} dx.$$

Ensuite par convergence dominée, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \to 0} -\int_0^{2\pi} \left(\frac{f'(x)}{\eta_f(x)}\right)' (\phi_\varepsilon \circ f(x)) \, dx = -\int_0^{2\pi} sign(f(x)) \frac{f(x)\left(f''(x)f(x) - f'(x)^2\right)}{\eta_f(x)^3} dx.$$

Exercice 5 (Une généralisation)
Soit F une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = -1, \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

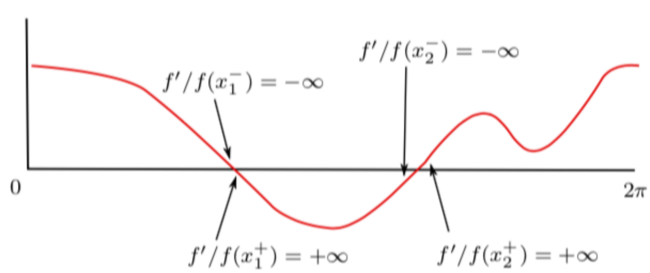
1. *Dans le cas où f est $2\pi-$périodique, montrer que l'on a plus généralement*

$$N(f, [0, 2\pi]) = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} F'\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' dx.$$

On désigne par $x_1 \leq \ldots \leq x_N$ les zéros de f dans $[0, 2\pi]$, et on pose $x_{N+1} := x_1 + 2\pi$. On peut alors décomposer l'intégrale de droite en la somme

$$-\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} F'\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' dx = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{x_i^+}^{x_{i+1}^-} F'\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' dx$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \underbrace{F\left(\frac{f'}{f}(x_i^-)\right) - F\left(\frac{f'}{f}(x_i^+)\right)}_{=-2} = N.$$



En effet, chaque zéro contribue pour -2, puisque F prends les valeurs ± 1 à $\pm\infty$ et que lors d'un "croisement" de l'axe des abscisses, la dérivée logarithmique f'/f passe toujours de la limite $-\infty$ à la limite $+\infty$.

2. *Montrer que l'on a en particulier*

$$N(f,[0,2\pi]) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f''(x)f(x) - f'(x)^2}{f(x)^2 + f'(x)^2}dx.$$

C'est la formule précédente avec $F(x) = \frac{2}{\pi}\arctan(x)$.

3. *Donner une formule analogue lorsque* f *n'est pas périodique.*
Le même raisonnement donne la formule générale

$$N(f,[a,b]) \quad = \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{f'}{f}(b)\right) - F\left(\frac{f'}{f}(a)\right) - \int_a^b F'\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' dx\right]$$