Autour de l'équirépartition

Ce document a pour but de s'entrainer à l'écrit d'analyse et probabilités. Étant donné un réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière et $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ sa partie fractionnaire. On dit qu'une suite de réels $(x_n)_{n\geq 1}$ est *équirépartie modulo* 1 si pour tout $0 \leq a \leq b \leq 1$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{Card}\left\{k \in [\![1;n]\!],\ \{x_k\} \in [a,b]\right\}}{n} = b - a.$$

On commence par rappeler les équivalences classiques suivantes, l'équivalence entre les points $i)$ et $iii)$ étant connue sous le nom de critère de Weyl.

Théoreme : Étant donnée une suite de réels $(x_n)_{n\geq 1}$, les assertions suivantes sont équivalentes.

$i)$ La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie modulo 1.

$ii)$ Pour toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_0^1 f(x)dx.$$

$iii)$ Pour tout entier $p > 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p x_k} = 0.$$

Exercice 1 *(Preuve du critère de Weyl)*

1. *Montrer que $i)$ implique $ii)$.*

   Indice : on pourra vérifier que $ii)$ est vraie pour les fonctions en escalier, puis raisonner par densité.

   Si $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{Card\left\{k \in [\![1;n]\!],\ \{x_k\} \in [a,b]\right\}}{n} \quad et \quad \int_0^1 f(x)dx = b-a.$$

   Autrement dit, si $i)$ est vrai, $ii)$ a lieu pour $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$. Comme les deux quantités sont linéaires en f, cela implique que $ii)$ est vrai pour les fonctions en escalier. Maintenant, si f est une fonction continue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier g telle que $||f-g||_\infty \leq \varepsilon$. Auquel cas, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-g(x_k)) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(x_k) - \int_0^1 g(x)dx + \int_0^1 (g(x)-f(x))dx,$$

   de sorte que

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \int_0^1 f(x)dx\right| \leq \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-g(x_k)|}_{\leq\varepsilon} + \underbrace{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(x_k) - \int_0^1 g(x)dx\right|}_{\to 0}$$
$$+ \underbrace{\int_0^1 |g(x)-f(x)|dx.}_{\leq \varepsilon}$$

2. *Montrer que ii) implique i).*
   Indice : on pourra encadrer l'indicatrice entre deux fonctions continues bien choisies.
   Soit $[a, b] \subset [0, 1]$ un intervalle. Supposons tout d'abord que $0 < a < b < 1$. Pour $p \geq 1$ assez grand, on définit alors les deux fonctions ψ_p et ϕ_p affines et continues sur $[0, 1]$ telles que ψ_p est nulle sur $[0, a] \cup [b, 1]$ (respectivement sur $[0, a - 1/p] \cup [b + 1/k, 1]$), constante égale à 1 sur $[a + 1/p, b - 1/p]$ (resp. sur $[a, b]$). On a ainsi $\psi_p \leq \mathbb{1}_{[a,b]} \leq \phi_p$ de sorte que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\psi_p(x_k) \leq \frac{Card\,\{k \in [\![1; n]\!],\ \{x_k\} \in [a, b]\}}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\phi_p(x_k).$$

   En passant à la limite en n, on a ainsi par ii)

$$b - a - \tfrac{1}{p} \leq \liminf_{n\to+\infty} \tfrac{Card\{k\in[\![1;n]\!],\ \{x_k\}\in[a,b]\}}{n}$$

$$\leq \limsup_{n\to+\infty} \tfrac{Card\{k\in[\![1;n]\!],\ \{x_k\}\in[a,b]\}}{n} \leq b - a + \tfrac{1}{p}.$$

   En faisant tendre ensuite p vers l'infini, on obtient i). Dans le cas $a = 0$ ou $b = 1$, il suffit d'adapter les définitions de ψ_p et ϕ_p.

3. *Montrer que ii) implique iii).*
   On applique le point ii) avec $f(x) = \cos(2\pi p x)$ et $f(x) = \sin(2\pi p x)$.

4. *Montrer que iii) implique ii).*
   Indice : on pourra raisonner par densité via le théorème de Weierstrass.
   Par linéarité, si iii) est vrai, la relation ii) est vérifiée pour tout polynôme trigométrique. On conclut par densité via le théorème de Weierstrass.

Exercice 2 *(Équirépartition et écriture en base 10)*
Dans cette partie, on s'intéresse à l'équirépartition des décimales de 2^n en base 10.

1. *Montrer que $\log(2)$ est irrationnel, où $\log$ désigne le logarithme en base 10.*
   On raisonne par l'absurde et on suppose que $\log(2) = p/q$ avec p et q deux entiers premiers entre eux. On a alors naturellement $p < q$. En prenant l'exponentielle, i.e. en considèrant les puissances de 10 ici, on a alors $2 = 10^{p/q}$ ou encore $2^{q-p} = 5^p$. Le membre de gauche est pair, celui de droite impair, d'où la contradiction.

2. *Montrer que si α est irrationnel, alors la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de terme général $x_n = n\alpha$ est équirépartie modulo 1.*
   On utilise le critère de Weyl : si $p \neq 0$ est un entier, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p\{k\alpha\}} = \frac{e^{2i\pi p\alpha}}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2i\pi pk\alpha} = \frac{e^{2i\pi p\alpha}}{n}\frac{1 - e^{2i\pi pn\alpha}}{1 - e^{2i\pi p\alpha}}$$

   de sorte que

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p\{k\alpha\}}\right| \leq \frac{2}{n}\frac{1}{|1 - e^{2i\pi p\alpha}|}$$

   le majorant tendant vers zéro lorsque n tend vers l'infini (à p fixé).

Étant donné un entier $n \geq 1$, on désigne par $a_{k(n)}(n)a_{k(n)-1}(n)\ldots a_1(n)$ l'écriture en base 10 de 2^n, où $k(n)$ est le nombre de décimales et $a_j(n) \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ pour $1 \leq j \leq k(n)$ et $a_{k(n)}(n) \neq 0$

$$2^n = \sum_{j=1}^{k(n)} a_j(n)10^{j-1}.$$

3. *Pour $n \geq 1$, on pose $a_n := a_{k(n)}(n)$ la première décimale de 2^n et pour $1 \leq j \leq 9$, on considère la proportion*

$$\tau(j, n) := \frac{Card\,(k \in \{1, \ldots, n\},\ a_k = j)}{n}.$$

Montrer que la limite $\lim_{n\to+\infty}\tau(j,n)$ *existe et expliciter cette limite.*

L'égalité $a_n = j$ *revient à dire que qu'il existe un entier* $r = r(n)$ *vérifiant l'encadrement* $j10^r \leq 2^n < (j+1)10^r$ *c'est-à-dire* $r+\log(j) \leq n\log(2) < r+\log(j+1)$ *ou encore* $\{n\log(2)\} \in [\log(j), \log(j+1)]$*. Autrement dit, on a*

$$\tau(j,n) = \frac{Card\,(k \in \{1,\dots,n\},\ \{k\log(2)\} \in [\log(j),\log(j+1)])}{n}$$

et comme la suite $\{n\log(2)\}$ *est équirépartie modulo 1, on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\tau(j,n) = \log(j+1) - \log(j) = \log\left(1+\frac{1}{j}\right).$$

Exercice 3 *(Non-équirépartition de la suite* $(\log(p_n))_{n\geq1}$ *modulo 1)*
On montre ici que si p_n *désigne le* $n-$*ième nombre premier, alors la suite* $(x_n)_{n\geq1} = (\log(p_n))_{n\geq1}$ *est non-équirépartie modulo 1. Pour* $k \in \mathbb{N}^*$*, on pose*

$$I_k := \inf\{n,\, p_n > e^k\}, \quad I_{k-\frac12} := \inf\{n,\, p_n > e^{k-\frac12}\},$$

et

$$S_k := \sum_{n<I_k} \mathbb{1}_{[0,\frac12]}\left(\{\log(p_n)\}\right), \quad S_{k-\frac12} := \sum_{n<I_{k-\frac12}} \mathbb{1}_{[0,\frac12]}\left(\{\log(p_n)\}\right).$$

1. *Montrer que* $S_k = S_{k-\frac12}$.
   On a naturellement $I_k \geq I_{k-\frac12}$ *de sorte que* $S_k \geq S_{k-\frac12}$*. Maintenant, si* $n \in [I_{k-\frac12}, I_k[$*, on a par définition*

$$e^{k-\frac12} \leq p_n \leq e^k, \quad \textit{donc}\ \ k-\frac12 \leq \log(p_n) \leq k \ \ \textit{et}\ \ \{\log(p_n)\} \notin [0,\frac12].$$

2. *Déduire du critère de Weyl et du théorème des nombres premiers que* $(\log(p_n))_{n\geq1}$ *est non-équirépartie modulo 1.*
   Si on avait équirépartition, d'après le critère de Weyl, il existerait une constante L telle que

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{S_k}{I_k} = \lim_{k\to+\infty}\frac{S_{k-\frac12}}{I_{k-\frac12}} = L.$$

   Si on avait $L > 0$*, cela impliquerait que* $\lim_{k\to+\infty}\frac{I_k}{I_{k-\frac12}} = 1$*. Notons que par définition,*

$$p_{\pi(x)} \leq x, \quad p_{\pi(x)+1} > x,$$

   en particulier

$$p_{\pi(e^k)} \leq e^k, \quad p_{\pi(e^k)+1} > e^k$$

   de sorte que $I_k = \pi(e^k)+1$ *et* $I_{k-\frac12} = \pi(e^{k-1/2})+1$*. D'après le théorème des nombres premiers, on a*

$$\pi(x) = \#\{p \textit{ premier}, p \leq x\} \sim \frac{x}{\ln(x)},$$

   en particulier

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{I_k}{I_{k-\frac12}} = \sqrt{e} \neq 1.$$

   Nécessairement, on a donc $L = 0$*. Mais cela est impossible puisque*

$$S_{k-\frac12} := \sum_{n<I_{k-\frac12}} \mathbb{1}_{[0,\frac12]}\left(\{\log(p_n)\}\right) \geq \sum_n \mathbb{1}_{e^{k-1}\leq p_n \leq e^{k-\frac12}} = \pi(e^{k-\frac12}) - \pi(e^{k-1})$$

de sorte que

$$\liminf_{k\to+\infty} \frac{S_{k-\frac{1}{2}}}{I_{k-\frac{1}{2}}} \geq \liminf_{k\to+\infty} \frac{\pi(e^{k-\frac{1}{2}}) - \pi(e^{k-1})}{\pi(e^{k-1/2})+1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} > 0.$$

Exercice 4 *(Non-équirépartition de la suite* $(\ln(n))_{n\geq 1}$*)*
Dans cette deuxième partie, on montre que la suite $(x_n)_{n\geq 1} = (\{\ln(n)\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est dense dans* $[0,1]$ *mais non-équirépartie.*

1. *Montrer que la suite* $(\{\ln(n)\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est dense dans* $[0,1]$.
   Soit $[a,b] \subset [0,1]$ *avec* $a < b$. *Pour tout* k *assez grand, c'est-à-dire tel que* $e^k(e^b - e^a) \geq 1$, *il existe* n *entier tel que* $e^{a+k} \leq n \leq e^{b+k}$, *de sorte que* $\{\ln(n)\} \in [a,b]$. *Ainsi, dans tout intervalle de longueur strictement positive, il existe une infinité de termes de la suite (un seul suffit).*
2. *Soient* n *dans* $\mathbb{N}^*$ *et* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction de classe* C^1. *Établir la formule suivante*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F(k) = \frac{1}{n}\int_1^n F(t)dt + \frac{1}{n}\int_1^n \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) F'(t)dt + \frac{F(1)+F(n)}{2n}.$$

   Cette formule n'est autre que la formule d'Euler–MacLaurin. On décompose l'intégrale comportant la partie fractionnaire en $\int_1^n = \sum_{j=1}^{n-1}\int_j^{j+1}$ *et on intègre chaque terme de la somme par parties :*

$$\begin{aligned}
\int_1^n \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) F'(t)dt &= \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right) F'(t)dt \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left((1-\frac{1}{2})F(k+1) - (-\frac{1}{2})F(k) - \int_k^{k+1} F(t)dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(F(k)+F(k+1)) - \int_1^n F(t)dt \\
&= -\int_1^n F(t)dt - \frac{F(1)+F(n)}{2} + \sum_{k=1}^{n} F(k).
\end{aligned}$$

3. *Montrer qu'il existe une suite complexe* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *qui tend vers* 0 *lorsque* n *tend vers l'infini et telle que*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi\ln(k)} = \frac{e^{2i\pi\ln(n)}}{2i\pi+1} + \varepsilon_n.$$

   On applique la formule précédente avec $F(t) := \exp(2i\pi\ln(t))$. *On a (en intégrant par partie ou en devinant la dérivée) :*

$$\int_1^n F(t)dt = \frac{n\exp(2i\pi\ln(n)) - 1}{2i\pi+1}.$$

   Sur $[1;+\infty[$, *le module de* F *est constant égal à* 1, *celui de* F' *est borné par* $2i\pi$ *et celui de la partie fractionnaire moins* $\frac{1}{2}$ *par* $\frac{1}{2}$. *Après division par* n, *les termes associés tendent donc vers* 0 *quand* n *tend vers* $+\infty$.
4. *En déduire que la suite* $(\ln(n))_{n\geq 1}$ *n'est pas équirépartie modulo 1. Le premier terme du membre de droite ne tend pas vers zéro lorsque* n *tend vers l'infini, aussi le critère de Weyl n'est pas satisfait pour* $p = 1$.
5. *(Un peu plus difficile). Fixons un intervalle* $[a,b]$ *avec* $0 \leq a < b < 1$ *(resp.* $0 < a < b \leq 1$*). Pour* $m \geq m_0$ *assez grand, on choisit une suite d'entiers* $(N_m)_{m\geq m_0}$ *de sorte que* $e^{m+b} < N_m < e^{m+1}$ *(resp.* $e^m < N_m < e^{m+a}$*). Montrer que la proportion*

$$\frac{Card\{k \in [\![1; N_m]\!],\ \{\ln(k)\} \in [a,b]\}}{N_m}$$

peut converger vers des limites différentes selon le choix de N_m.

On détaille pour le cas $0 \leq a < b < 1$. On remarque que la suite $(N_m)_{m \geq m_0}$ est strictement croissante et qu'on a, pour tout m supérieur ou égal à m_0, $m = \lfloor \ln(N_m) \rfloor$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on a

$$\{\ln(n)\} \in [a; b] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ k + a \leq \ln(n) \leq k + b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ e^{k+a} \leq n \leq e^{k+b}.$$

De plus, si un tel k existe, il est unique, égal à $\lfloor \ln n \rfloor$ (en fait les intervalles $[e^{k+a}; e^{k+b}]$ sont deux à deux disjoints). Si n est dans $[\![1; N_m]\!]$, on a $k = \lfloor \ln(n) \rfloor \leq \lfloor \ln(N_m) \rfloor = m$. Récroquement, si $\{\ln(n)\}$ est dans $[a; b]$ avec $k = \lfloor \ln(n) \rfloor \leq m$, alors l'inégalité $e^{k+b} \leq e^{m+b} < N_m$ assure que m est dans $[\![1; N_m]\!]$. On a donc, pour tout m dans $\mathbb{N}_{\geq m_0}$:

$$\{n \in [\![1; N_m]\!] \mid \{\ln(n)\} \in [a; b]\} = \bigsqcup_{k=0}^{m} \left[e^{k+a}; e^{k+b}\right] \cap \mathbb{N}^*.$$

Et, pour tout k dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Card}\left(\left[e^{k+a}; e^{k+b}\right] \cap \mathbb{N}^*\right) & = & \varepsilon_k + \mathrm{Card}\left(\left]e^{k+a}; e^{k+b}\right] \cap \mathbb{N}^*\right) \\
& = & \varepsilon_k + \mathrm{Card}[\![\lfloor e^{k+a} \rfloor + 1; \lfloor e^{k+b} \rfloor]\!] \\
& = & \varepsilon_k + \lfloor e^{k+b} \rfloor - \lfloor e^{k+a} \rfloor \\
& = & e^{k+b} - e^{k+a} + \left\{e^{k+a}\right\} - \left\{e^{k+b}\right\} + \varepsilon_k \\
& = & e^{k+b} - e^{k+a} + \theta_k
\end{array}$$

avec $\varepsilon_k = 1$ si e^{k+a} est entier, et 0 sinon (en pratique il est donc toujours nul puisque e est transcendant...) et donc θ_k dans $[-1; 2]$. On en déduit

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{1}{N_m}\mathrm{Card}\,\{n \in [\![1; N_m]\!] \mid \{\ln(n)\} \in [a; b]\} & = & \dfrac{1}{N_m}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{m} e^{k+b} - e^{k+a} + \theta_k\right) \\
& = & \dfrac{1}{N_m}\left((e^b - e^a)\dfrac{e^{m+1} - 1}{e - 1} + \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \theta_k\right) \\
& = & \dfrac{e^b - e^a}{e - 1}\dfrac{e^{m+1}}{N_m} + O\left(\dfrac{1}{N_m}\right)
\end{array}$$

Or, selon le choix de N_m entre $\lfloor e^{m+b} \rfloor + 1$ et $\lfloor e^{m+1} \rfloor - 1$, on peut obtenir des limites différentes. Par exemple, si on choisit $N_m = \lfloor e^{m+b} \rfloor + 1$, on a alors $e^{m+b} \leq N_m \leq e^{m+b} + 1$ et $\frac{N_m}{e^{m+1}}$ tend vers e^{b-1} donc $\frac{e^{m+1}}{N_m}$ tend vers e^{1-b}. Si on choisit au contraire $N_m = \lfloor e^{m+1} \rfloor - 1$, on a $e^{m+1} - 1 \leq N_m \leq e^{m+1}$ et $\frac{e^{m+1}}{N_m}$ tend vers 1.

Exercice 5 *(Retour sur les polynômes trigonométriques aléatoires)*
On considère la suite de polynômes trigonométriques

$$f_n(x) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(2\pi k x), \quad x \in [0, 1], \quad n \geq 1,$$

où la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et telles que $\mathbb{E}[a_k] = 0$ et $\mathbb{E}[a_k^2] = 1$. On considère par ailleurs une variable aléatoire X de loi uniforme sur $[0, 1]$, indépendante de la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ et on note $\mathbb{E}_X$ l'espérance associée, autrement si h est une fonction mesurable bornée

$$\mathbb{E}_X[h(X)] = \int_0^1 h(x)dx.$$

On veillera à bien distinguer l'espérance $\mathbb{E}$ associée aux coefficients $(a_k)_{k \geq 1}$ et $\mathbb{E}_X$ associée à la variable indépendante X.

1. *Calculer* $\mathbb{E}[f_n(X)^2]$*, quelle est sa limite lorsque* n *tend vers l'infini ?*
   En développant le carré, on a

$$f_n(X)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n} a_k a_l \cos(2\pi kX)\cos(2\pi lX).$$

   En prenant l'espérance selon les coefficients, on a alors

$$\mathbb{E}[f_n(X)^2] = \frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n} \mathbb{E}[a_k a_l]\cos(2\pi kX)\cos(2\pi lX) = \frac{1}{n}\sum_{k}^{n}\cos^2(2\pi kX).$$

   Or presque sûrement pour la mesure uniforme, i.e. la mesure de Lebesgue, i.e. la loi de X*, on a* $2\pi X \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *de sorte par la question 11,* $(2\pi kX)_{k\geq 1}$ *est équirépartie modulo 1. Ainsi, par le critère ii) de la première partie, on a*

$$\mathbb{E}[f_n(X)^2] = \frac{1}{n}\sum_{k}^{n}\cos^2(2\pi kX) \to \int_0^1 \cos^2(2\pi kx)dx = \frac{1}{2}.$$

2. *Calculer* $\mathbb{E}_X[f_n(X)^2]$*, quelle est sa limite lorsque* n *tend vers l'infini ?*
   Par orthogonalité de $\cos(2\pi kx)$ *et* $\cos(2\pi lx)$ *dans* $\mathbb{L}^2([0,1])$ *pour* $k \neq l$*, il vient alors*

$$\mathbb{E}_X[f_n(X)^2] = \frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n} a_k a_l \int_0^1 \cos(2\pi kx)\cos(2\pi lx)dx = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

   D'après la loi des grands nombres, on a alors presque sûrement pour la probabilité $\mathbb{P}$

$$\mathbb{E}_X[f_n(X)^2] \to \frac{1}{2}.$$

3. *(Question plus difficile). Montrer que sous la probabilité* $\mathbb{P}$*, pour presque toute réalisation de* X*, la suite* $(f_n(X))_{n\geq 1}$ *converge en loi vers une gaussienne* $\mathcal{N}(0,1/2)$*.*
   On reprend la démonstration classique du théorème limite central via les fonctions caractéristiques. On ainsi, si ϕ *désigne la fonction caractéristique commune des* (a_k)

$$\mathbb{E}[e^{itf_n(X)}] = \mathbb{E}\left[e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} a_k\cos(2\pi kX)}\right] = \prod_{k=1}^{n}\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\cos(2\pi kX)\right).$$

   Comme dans la preuve usuelle, on fait un développement limité en zéro de ϕ*. Uniformément en* k *(car* $\cos(2\pi kX)$ *est uniformément borné par 1), on a ainsi*

$$\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\cos(2\pi kX)\right) = 1 - \frac{t^2}{2n}\cos^2(2\pi kX) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

   et pour n *assez grand, pour la détermination principale usuelle du logarithme on a alors*

$$\log\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\cos(2\pi kX)\right) = -\frac{t^2}{2n}\cos^2(2\pi kX) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

   On en déduit alors que

$$\log\prod_{k=1}^{n}\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\cos(2\pi kX)\right) = -\frac{t^2}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2(2\pi kX) + o\left(1\right).$$

   Comme dans la question 13, pour presque toute réalisation de X*, on a alors lorsque* n *tend vers l'infini*

$$-\frac{t^2}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2(2\pi kX) \longrightarrow -\frac{t^2}{4},$$

de sorte que

$$\mathbb{E}[e^{itf_n(X)}] \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{4}},$$

d'où le résultat.