Feuille de travaux pratiques # 9

L'objet de ce TP est de générer une marche aléatoire à boucles effacées sur un graphe, puis d'implémenter l'algorithme de Wilson qui permet d'en déduire un arbre couvrant uniforme. Si besoin, on pourra utiliser les codes disponibles ici.

1 Vers la marche aléatoire à boucles effacées

1.1 La marche simple sur un graphe

On considère un graphe connexe $G = (S, A)$ où S désigne l'ensemble des sommets et $A \subset S \times S$ l'ensemble des arêtes (non orientées). À tout sommet $x \in S$, on associe son degré (supposé fini) $\deg(x) := \# V_x$ où $V_x := \{y \in S,\ (x, y) \in A\}$ désigne l'ensemble des voisins immédiats de x dans le graphe. On rappelle que la marche aléatoire simple dans G issue de $x_0 \in S$ est la chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n\geq 0}$ telle que $X_0 = x_0$ presque sûrement et telle que pour tout $n \geq 0$, la loi conditionnelle $\mathcal{L}(X_{n+1}|X_n = x)$ est la loi uniforme sur V_x. Autrement dit :

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0) = 1, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) = \begin{cases} \frac{1}{\deg(x)} & \text{si } y \in V_x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 1. *Générer une marche aléatoire simple issue de l'origine dans le graphe $\mathbb{Z}^2$ des points du plan à coordonnées entières. Même question sur une grille $n \times n$, c'est-à-dire sur le graphe $G = \mathbb{Z}^2 \cap [0, n-1] \times [0, n-1]$ représenté à gauche dans la figure 2 ci-dessous dans le cas $n = 4$.*

1.2 La marche aléatoire à boucles effacées

On appelle marche aléatoire à boucles effacées dans G issue de $x_0 \in S$, la trajectoire aléatoire obtenue à partir de la marche aléatoire simple issue de x_0 décrite ci-dessus, en effaçant les éventuelles boucles par ordre chronologique d'apparition. Naturellement, la courbe obtenue après l'effacement des boucles est une courbe simple, sans auto-intersection.

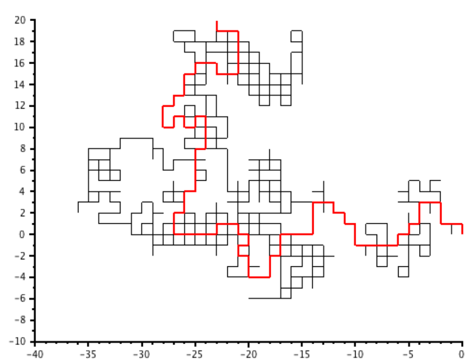

Figure 1 – Exemple de trajectoire de marche aléatoire simple dans $\mathbb{Z}^2$ et de sa version à boucles effacées (en rouge).

L'algorithme qui à partir des coordonnées $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ de la marche simple initiale fourni les coordonnées de son analogue à boucles effacées peut être décrit comme suit :

$$\begin{cases} \text{on initialise } i_0 := \max\{i,\ S_i = S_0\}, \text{ et tant que } S_{i_j} \neq S_n \\ \text{on pose } i_{j+1} = \max\{i, S_i = S_{i_j}\} + 1. \end{cases}$$

Dès lors, si J est le premier entier tel que $S_{i_J} = S_n$, la marche à boucles effacées est donnée par $LE(S) := (S_{i_0}, S_{i_1}, \ldots, S_{i_J})$.

Exercice 2. *Écrire une fonction Scilab qui a partir d'une trajectoire de la marche simple sur $\mathbb{Z}^2$ ou sur la grille $n \times n$ de l'exercice précédent, génère une trajectoire de la marche à boucle effacées.*

2 Arbre couvrant

2.1 La notion d'arbre couvrant

Étant donné un graphe connexe $G = (S, A)$, on appelle arbre couvrant au dessus de G tout graphe connexe T dont l'ensemble des sommets coincide avec S et qui ne possède pas de cycle. Autrement dit, $T = (S_T, B_T)$ avec $S_T = S$ et $A_T \subset A$ choisi de sorte que le graphe obtenu soit connexe et sans cycle.

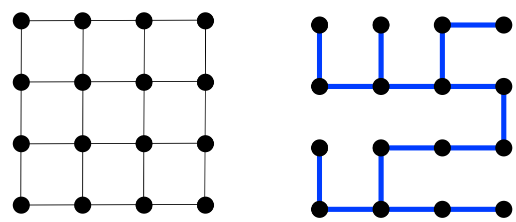

Figure 2 – Grille 4×4 et un exemple d'arbre couvrant.

Si le graphe d'origine G est fini, il n'y a naturellement qu'un nombre fini d'arbres couvrants au dessus de G. Aussi peut-on en choisir un selon la mesure uniforme, on parle alors d'arbre couvrant uniforme au dessus de G. Dans le cas très simple de la grille $n \times n$ envisagé précédemment, on montre cependant facilement que le nombre de tels arbres couvrants croît exponentiellement vite avec n^2, aussi il n'est pas du tout évident de simuler un arbre couvrant uniforme. L'algorithme de Wilson permet précisément d'outrepasser cette difficulté.

2.2 L'algorithme de Wilson

L'algorithme de Wilson est un algorithme d'exploration basé sur la notion de marche aléatoire à boucles effacées. On suppose que le graphe connexe $G = (S, A)$ de départ est fini, et on énumère ces sommets $S = \{s_0, \ldots, s_{n-1}\}$, l'ordre des sommets n'ayant aucune importance. On construit le futur arbre couvrant par récurrence. On pose ainsi $T_0 = (\{s_0\}, \emptyset)$. Ensuite, pour tout $1 \leq i \leq n-1$, on lance une marche aléatoire à boucles effacées issue de s_i, et on s'arrête dès que l'on atteint l'arbre T_{i-1}. On incorpore alors la trajectoire sans cycle γ_i obtenue dans le nouvel arbre $T_i = T_{i-1} \cup \gamma_i$ On vérifie facilement qu'à chaque étape, T_i est un arbre et par construction T_{n-1} contient tous les sommets de S. C'est donc un arbre couvrant de au dessus de G. On peut montrer que la loi de l'arbre obtenu est uniforme.

Exercice 3. *Implémenter l'algorithme de Wilson pour générer un arbre couvrant uniforme au-dessus de la grille $n \times n$ comme dans la figure 2.*