Feuille de travaux pratiques # 8

Ce document a pour but d'illustrer, à l'aide Scilab, quelques propriétés des processus de Poisson. Les exercices à traiter en priorité sont indiqués en rouge.

1 Définition, représentations, simulation

On rappelle dans un premier temps la définition d'un processus de Poisson (simple).

Définition 1. *Un processus de Poisson (simple) $(N_t)_{t\geq 0}$ d'intensité λ est un processus stochastique issu de zéro, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et tel que :*

1. *pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la variable aléatoire N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt,*
2. *pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, les variables $N_{t+s} - N_t$ et N_t sont indépendantes.*

Un tel processus se représente facilement à partir de la donnée d'une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ. En effet, si on pose $T_n := S_1 + \ldots + S_n$, on vérifie que le processus $(N_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$N_t := \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{T_n \leq t},$$

est un processus de Poisson d'intensité λ.

Exercice 1. *Montrer que la variable T_n suit une loi $\Gamma(n, \lambda)$ et illustrer cette identité en superposant un histogramme empirique à la densité cible.*

Proposition 1 (Loi conditionnelle des temps de saut)**.** *Sachant que $N_t = k$ (avec $k \geq 1$), la loi du $k-$uplet $(T_1, \ldots, T_k)$ coincide avec celle d'un $k-$échantillon ordonné de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $[0,t]$.*

Exercice 2. *Simulation de trajectoires.*

1. *Simuler et afficher une trajectoire d'un processus de Poisson simple d'intensité $\lambda = 1/5$ jusqu'à son 20ième saut.*
2. *Simuler une trajectoire de processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1/5$ jusqu'à l'instant $t = 20$*
   (a) à l'aide d'une boucle `while`,
   (b) à l'aide de la proposition 1.

   Comparer ces deux méthodes en générant mille trajectoires avec chaque méthode et mesurer le temps de calcul grâce aux commandes `timer`, ou encore `tic` et `tac`.
3. *Illustrer le fait que N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt.*
4. *(Pour celles/ceux qui sont le plus à l'aise) Reprendre la question précédente en effectuant un test du χ^2 d'adéquation.*

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a l'encadrement $T_{N_t} \leq t < T_{N_t+1}$. On définit des variables aléatoires réelles positives U_t et V_t par

$$U_t := t - T_{N_t}, \qquad V_t := T_{N_t+1} - t,$$

de sorte que U_t mesure la durée entre le temps courant et le temps du dernier saut, et V_t mesure la durée entre le temps courant et l'instant du prochain saut. On démontre le résultat suivant :

Proposition 2. *Pour tout $t \geq 0$, les variables aléatoires U_t et V_t sont indépendantes. La loi de U_t est celle de $S_1 \wedge t$ et celle de V_t est égale à celle de $S_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$.*

Exercice 3. *Paradoxe de l'inspection.*

1. *Montrer que l'espérance de la longueur de l'intervalle $[T_{N_t}, T_{N_t+1}]$ est égale à $\lambda^{-1}(2 - e^{-\lambda t})$, et tend donc rapidement vers $2/\lambda$ lorsque t tend vers l'infini.*
2. *Quelle est l'espérance des temps d'inter-sauts S_k ? Commenter.*

2 Comportement asymptotique et estimation

En écrivant N_t comme la somme de ses accroissements (indépendants), on peut établir facilement les comportements asymptotiques suivants pour les trajectoires d'un processus de Poisson simple.

Proposition 3. *Lorsque t tend vers l'infini, on a les convergences suivantes :*

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow{p.s.} \lambda, \qquad \sqrt{\frac{t}{\lambda}} \left(\frac{N_t}{t} - \lambda \right) \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, 1).$$

Exercice 4. *Estimation de l'intensité.*

1. *À l'aide d'un générateur aléatoire de votre choix, choisir une intensité $\lambda > 0$ au hasard.*
2. *Génèrer alors une trajectoire d'un processus de Poisson d'intensité λ et proposer un estimateur $\widehat{\lambda}_t$ de cette intensité.*
3. *Proposer un intervalle de confiance I_t pour λ de niveau de confiance 95%.*
4. *Représenter sur un même graphique l'évolution temporelle de l'estimateur $\widehat{\lambda}_t$ et de l'intervalle de confiance I_t.*

L'intensité du processus peut aussi naturellement être estimée à partir de l'observation des temps de sauts du processus. En effet, la loi des grands nombres et le théorème limite central appliqués à $T_n = S_1 + \ldots + S_n$ donnent

$$\frac{T_n}{n} \xrightarrow{p.s.} \frac{1}{\lambda}, \qquad \sqrt{n} \left(\lambda \frac{T_n}{n} - 1 \right) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Exercice 5. *Estimation de l'intensité (le retour).*

1. *À l'aide d'un générateur aléatoire de votre choix, choisir une intensité $\lambda > 0$ au hasard.*
2. *Génèrer alors une trajectoire d'un processus de Poisson d'intensité λ jusqu'à son $n-$ième saut et proposer un estimateur $\widehat{\lambda}_n$ de cette intensité.*
3. *Proposer un intervalle de confiance I_n pour λ de niveau de confiance 95%.*
4. *Représenter sur un même graphique l'évolution temporelle de l'estimateur $\widehat{\lambda}_n$ et de l'intervalle de confiance I_n.*

3 Quelques compléments

3.1 Superposition et décomposition

Proposition 4 (Superposition de deux processus de Poisson)**.** *Si $(M_t)_{t\geq 0}$ et $(N_t)_{t\geq 0}$ sont deux processus de Poisson simples indépendants de paramètres respectifs λ et μ alors la somme de processus $(M_t+N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson simple de paramètre $\lambda+\mu$.*

Exercice 6. *Proposer une illustration de la proposition 4.*

Proposition 5 (Décomposition d'un processus de Poisson)**.** *Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poissson simple de paramètre λ. On construit les processus deux processus $(N_t^1)_{t\geq 0}$ et $(N_t^2)_{t\geq 0}$ de la façon suivante : à chaque saut (indépendamment des autres) du processus de base $(N_t)_{t\geq 0}$, on choisit de faire sauter $(N_t^1)_{t\geq 0}$ avec probabilité p ou $(N_t^2)_{t\geq 0}$ avec probabilité $1-p$. Alors les processus $(N_t^1)_{t\geq 0}$ et $(N_t^2)_{t\geq 0}$ sont deux processus de Poisson simples indépendants d'intensité respectives $p\lambda$ et $(1-p)\lambda$.*

Exercice 7. *Écrire une fonction qui trace une trajectoire du processus de base $(N_t)_{t\geq 0}$ et en déduit les trajectoires des sous-processus $(N_t^1)_{t\geq 0}$ et $(N_t^2)_{t\geq 0}$.*

3.2 Processus de Poisson composé

Définition 2. *Soient $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi ν, indépendante de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$. On pose $T_n := S_1+\ldots+S_n$. On appelle processus de Poisson composé d'intensité $\lambda>0$ et de loi de saut ν le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ issu de zéro défini par*

$$X_t := \sum_{n\geq 0} Y_n \mathbb{1}_{T_n\leq t}.$$

Remarque 1. *Le processus de Poisson simple est un processus de Poisson composé où la loi des sauts est la mesure de Dirac δ_1.*

Exercice 8. *Simuler une trajectoire de processus de Poisson composé d'intensité 1 et de loi de saut $\mathcal{N}(0,1)$.*

Proposition 6 (Loi d'une somme aléatoire)**.** *Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d. de fonction caractéristique ϕ et soit N une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, de fonction génératrice G, indépendante de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, la somme aléatoire*

$$S = \mathbb{1}_{N\geq 1}\sum_{n=1}^{N} Y_n$$

admet pour fonction caractéristique $\phi_S(u)=G(\phi(u))$.

Corollaire 1. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson composé d'intensité λ et de loi de saut ν de moyenne m et de variance $\sigma^2<+\infty$. Alors, pour tout $t\geq 0$:*

$$\mathbb{E}[X_t]=\mathbb{E}[N_t]\mathbb{E}[Y_1]=m\lambda t, \qquad var(X_t)=\mathbb{E}[N_t]var(Y_1)+var(N_t)\mathbb{E}[Y_1]^2=\lambda t\sigma^2+\lambda t m^2.$$

Exercice 9. *Illustrer le corollaire en considérant différentes lois de saut.*