

## QUELQUES ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE POUR L'AGRÉGATION

L'objectif de ces notes est de revenir rapidement sur les notions de base de calcul/géométrie différentiel(le) exigibles au programme de l'agrégation et d'en donner quelques illustrations plus ou moins classiques.

### 1 La géométrie différentielle à l'agrégation

#### 1.1 Le programme officiel, rapport et commentaires du jury

##### 1.1.1 Le programme

Voici tout d'abord la liste des notions de calcul différentiel qui figuraient dans le programme officiel de l'agrégation en 2015 :

*Applications différentiables sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Différentielle (application linéaire tangente). Dérivée selon un vecteur. Dérivées partielles. Opérations algébriques sur les applications différentiables. Composition d'applications différentiables. Théorème des accroissements finis. Applications de classe  $C^1$ . Matrice jacobienne. Applications de classe  $C^k$ . Dérivées partielles d'ordre  $k$ . Interversion de l'ordre des dérivations. Formule de Taylor avec reste intégral, formule de Taylor-Young. Étude locale des applications à valeur dans  $\mathbb{R}^n$ . Développements limités. Recherche des extremums locaux. Difféomorphismes. Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites.*

Et plus précisément, les notions de géométrie différentielle exigibles étaient les suivantes :

*Sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ . Définitions équivalentes : graphe local, paramétrisation locale, équation locale. Espace tangent. Notions métriques : longueur d'un arc, paramétrisation normale, courbure d'un arc en dimensions 2 et 3. Gradient. Tracé de courbes usuelles. Surfaces dans  $\mathbb{R}^3$  : position par rapport au plan tangent. Définition de la divergence d'un champ de vecteurs. Extrema locaux d'une fonction définie sur une sous-variété (extrema liés), multiplicateurs de Lagrange.*

Les leçons explicitement/expressément concernées étaient :

- 214 - Théorèmes d'inversion locale, des fonctions implicites. Exemples et applications.
- 215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Exemples et applications.
- 216 - Étude métrique des courbes. Exemples.
- 217 - Sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ . Exemples.

##### 1.1.2 Évolution du programme

Le programme officiel a depuis connu quelques modifications. En 2016/2017, les leçons classiques “Sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ ” et “Étude métrique des courbes” ou sa version antérieure “Courbes et surfaces” ont été supprimées. La leçon 214 a vu quant à elle son titre évoluer en “Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.”

Insistons néanmoins sur le fait que la notion de sous-variété différentielle est toujours exigible, par exemple l'épreuve écrite de mathématique générale de 2016 tournait sans le dire explicitement autour de la notion de variété symplectique.

### 1.1.3 Ce que dit le rapport du jury

Les commentaires suivants sont issus des rapports du jury 2014 et suivants :

Sur la géométrie en général :

Les leçons de géométrie sont souvent délaissées alors que les candidats seront amenés à enseigner la géométrie. Notons de plus que les illustrations des notions algébriques des leçons par des exemples et des applications issus de la géométrie sont les bienvenus, ceci tout particulièrement en théorie des groupe. À ce propos, rappelons qu'un dessin au tableau est souvent apprécié et soulignons que le jury n'est pas vraiment regardant sur les qualités esthétiques du dessin.

Sur l'exponentielle de matrice :

Les notions d'algèbres de Lie ne sont pas au programme de l'agrégation, on conseille de n'aborder ces sujets qu'à condition d'avoir une certaine solidité. Sans aller si loin, on pourra donner une application de l'exponentielle (de matrice) à la décomposition polaire de certains sous-groupes fermés de  $GL_n(\mathbb{R})$  (groupes orthogonaux par exemple).

Sur les formes quadratiques :

La preuve de la loi d'inertie de Sylvester doit être connue ainsi que l'orthogonalisation simultanée. Le candidat doit avoir compris la signification géométrique de ces deux entiers composant la signature d'une forme quadratique réelle ainsi que leur caractère classifiant. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante.

Sur les théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites :

Il s'agit d'une leçon qui exige une bonne maîtrise du calcul différentiel. Même si le candidat ne propose pas ces thèmes en développement, on est en droit d'attendre de lui des idées de démonstration des deux théorèmes fondamentaux qui donnent son intitulé à la leçon. Il est indispensable de savoir mettre en pratique le théorème des fonctions implicites au moins dans le cas de deux variables réelles. On attend des applications en géométrie différentielle notamment dans la formulation des multiplicateurs de Lagrange. Plusieurs inégalités classiques de l'analyse peuvent se démontrer avec ce point de vue : Hölder, Carleman, Hadamard,... En ce qui concerne la preuve du théorème des extrema liés, la présentation de la preuve par raisonnement « sous-matriciel » est souvent obscure ; on privilégiera si possible une présentation géométrique s'appuyant sur l'espace tangent. Pour aller plus loin, l'introduction des sous-variétés est naturelle dans cette leçon. Il s'agit aussi d'agrémenter cette leçon d'exemples et d'applications en géométrie, sur les courbes et les surfaces.

Sur les applications différentiables entre espaces euclidiens :

Cette leçon requiert une bonne maîtrise de la notion de différentielle première et de son lien avec les dérivées partielles. Le théorème de différentiation composée doit être connu et pouvoir être appliqué dans des cas simples comme le calcul de la différentielle de l'application  $x \mapsto \|x\|^2$  pour la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ . La notion de différentielle seconde est attendue au moins pour les fonctions de classe  $C^2$  ainsi que les applications classiques quant à l'existence d'extrema locaux.

Sur les sous-variétés de l'espace euclidien :

Cette leçon n'a pas eu beaucoup de succès, c'est bien dommage. Elle ne saurait être réduite à un cours de géométrie différentielle abstraite ; ce serait un contresens. Le jury attend une leçon concrète, montrant une compréhension géométrique locale. Aucune notion globale n'est exigible,

ni de notion de variété abstraite. Le candidat doit pouvoir être capable de donner plusieurs représentations locales (paramétriques, équations, etc.) et d'illustrer la notion d'espace tangent sur des exemples classiques. L'illustration de la leçon par des dessins est la bienvenue. Le jury invite les candidats à réfléchir à la pertinence de l'introduction de la notion de sous-variétés. Le théorème des extremas liés devient assez transparent lorsqu'on le traite par les sous-variétés. Les groupes classiques donnent des exemples utiles de sous-variétés.

Sur les extrema :

Il faut bien faire la distinction entre propriétés locales (caractérisation d'un extremum) et globales (existence par compacité, par exemple) [...] les problèmes de minimisation sous contrainte amènent à faire le lien avec les extrema liés, la notion de multiplicateur de Lagrange [...].

## 1.2 Les leçons où l'on peut/doit parler de géométrie différentielle

- 106 - Groupe linéaire d'un e.v. de dimension finie  $E$ , sous-groupes de  $GL(E)$ . Applications.
- 150 - Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
- 151 - Dimension d'un e.v.. Rang. Exemples et applications.
- 152 - Déterminant. Exemples et applications.
- 156 - Exponentielle de matrices. Applications.
- 158 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
- 159 - Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.
- 170 - Formes quad. sur un e.v. de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
- 171 - Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.
- 183 - Utilisation des groupes en géométrie.
- 214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.
- 215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Exemples et applications.
- ~~216 - Étude métrique des courbes. Exemples.~~
- ~~217 - Sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ . Exemples.~~
- 219 - Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.
- 264 - Variables aléatoires discrètes : exemples et applications.

## 2 Rappels de calcul différentiel

On commence par rappeler les prérequis indispensables de calcul différentiel, prérequis que l'on pourra retrouver par exemple dans [Laf96] ou [Rou03].

### 2.1 Rappels et notations

**Définition 1** (Différentielle d'une application). *Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces normés sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et soit  $U$  un ouvert de  $E$ . Une application  $f : U \rightarrow F$  est différentiable au point  $x \in U$  s'il existe une application linéaire  $L \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que*

$$\|f(x+h) - f(x) - L(h)\|_F = o(\|h\|_E).$$

*Auquel cas, l'application  $L$  est unique, on parle de différentielle de  $f$  en  $x$  et on la note  $D_x f$ .*

**Proposition 1** (Différentielle et composition). *Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$ ,  $(F, \|\cdot\|_F)$ ,  $(G, \|\cdot\|_G)$  des espaces normés et  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  des applications différentiables aux points  $x \in E$  et  $f(x) \in F$ . Alors, l'application  $g \circ f : E \rightarrow G$  est différentiable et sa différentielle est donnée par*

$$D_x(g \circ f) = D_{f(x)}g \circ D_x f$$

**Définition 2** (Continue différentiabilité). *L'application  $f : U \rightarrow F$  est dite de classe  $C^1$  sur  $U$  si elle est différentiable en tout point  $x \in U$  et si l'application  $x \mapsto D_x f$  de  $U$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$  est continue.*

Si  $E = \mathbb{R}^n$  et  $F = \mathbb{R}$ , l'espace  $\mathcal{L}(E, F)$  s'identifie à  $\mathbb{R}^n$  (matrice à une ligne et  $n$  colonnes). La différentielle  $D_x f$  est alors une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^n$ . L'espace  $E$  étant muni du produit scalaire euclidien  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , d'après le théorème de représentation de Riesz, cette forme s'identifie à un vecteur.

**Définition 3** (Gradient). *Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable en  $x$ , alors il existe un unique vecteur noté  $\text{grad } f(x)$  ou encore  $\nabla_x f$  tel que*

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad D_x f(h) = \langle \nabla_x f, h \rangle.$$

Si  $E = \mathbb{R}^n$  et  $F = \mathbb{R}^p$ , et si  $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$ , la différentielle  $D_x f$  est l'application linéaire définie, dans les bases canoniques de  $E = \mathbb{R}^n$  et  $F = \mathbb{R}^p$ , par la matrice jacobienne

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Lorsque  $n = p$ , la différentielle  $D_x f$  est alors inversible si et seulement si son jacobien  $\det(J)$  est non nul.

**Définition 4** (Divergence d'un champ de vecteur). *Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est différentiable, la divergence  $\text{div } f(x)$  de  $f$  en  $x$  est la trace de la différentielle  $D_x f$  :*

$$\text{div } f(x) := \text{tr } D_x f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x).$$

## 2.2 Interprétation

Il est primordial d'avoir une vision claire et concrète des notions ci-dessus. Outre les interprétations données plus bas, il est important de savoir sur quels espaces sont définies les différentielles d'ordre 1 ou d'ordres supérieurs, dans quels espaces elles sont à valeurs etc.

**Exercice 1** (Différentielle du déterminant, [Rou03] exercice 26 p. 76).

1. Montrer que la fonction  $\det$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et que  $D_{\text{Id}} \det = \text{tr}$ .
2. En déduire que pour tout  $X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a  $D_X \det(H) = \text{tr}(\bar{X}H)$  où  $\bar{X}$  est la transposée de la comatrice  $X$ .

**Exercice 2** (Interprétation du gradient, [Rou03] exercice 28 p. 80).

Le vecteur  $\nabla_x f$  donne la "direction de plus grande pente en  $x$ ".

Soit en effet  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , un point  $x \in \mathbb{R}^2$  et  $\gamma$  un arc paramétré tel que  $\gamma(0) = x$  et  $\|\gamma'(t)\| = 1$  pour tout  $t \geq 0$ . La fonction composée  $t \mapsto f \circ \gamma(t)$  a alors pour dérivée à l'origine

$$(f \circ \gamma)'(0) = D_x f \gamma'(0) = \langle \nabla_x f, \gamma'(0) \rangle.$$

Le vecteur unitaire  $\gamma'(0)$  variant, ce produit scalaire prend toutes les valeurs de  $-\|\nabla_x f\|$  à  $\|\nabla_x f\|$ , d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La valeur maximale  $\|\nabla_x f\|$  est obtenue si et seulement si  $\gamma'(0)$  est colinéaire à  $\nabla_x f$  et de même sens : c'est là que  $f \circ \gamma$  croît le plus vite au voisinage de zéro.

**Exercice 3** (Interprétation du jacobien, [Rou03] exercice 29 p. 82). Soit  $f$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  entre deux ouverts  $U$  et  $V$  de  $\mathbb{R}^n$ . On suppose que  $0 \in U \cap V$  et  $f(0) = 0$ . On rappelle que si  $\mathcal{H}^n$  désigne la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^n$  et si  $X$  est une partie fermée de  $\mathbb{R}^n$ , alors pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ , on a  $\mathcal{H}^n(AX) = |\det A| \mathcal{H}^n(X)$ .

1. Montrer que pour tout  $0 < \varepsilon < 1$ , il existe  $r_\varepsilon > 0$  assez petit tel que pour  $\|x\| \leq r_\varepsilon$  :

$$\|(D_0 f)^{-1} f(x) - x\| \leq \varepsilon \|x\|.$$

2. Montrer qu'il existe  $\rho_\varepsilon > 0$  tel que pour  $0 \leq \rho \leq \rho_\varepsilon$  :

$$(1 - \varepsilon)D_0 f(B_\rho) \subset f(B_\rho) \subset (1 + \varepsilon)D_0 f(B_\rho).$$

3. Montrer que

$$|\det D_0 f| = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^n(f(B_r))}{\mathcal{H}^n(B_r)}.$$

**Exercice 4** (Interprétation de la divergence, [Rou03] exercice p.84). Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs. Pour  $x \in \mathbb{R}^n$ , on note  $\varphi_t(x)$  le flot associé issu de  $x$ , i.e.  $\varphi_t(x)$  est la solution du système différentiel  $y' = f(y)$  et  $y(0) = x$ .

1. Si  $f(x) = Ax$  pour une matrice constante  $A$ , calculer  $\text{div } f(x)$ ,  $\varphi_t(x)$  et  $\mathcal{H}^n(\varphi_t(K))$  où  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$ .
2. Dans le cas général, montrer que

$$\text{div } f(x) = \frac{\partial}{\partial t} \det D\varphi_t(x) \Big|_{t=0}.$$

### 2.3 Formules de l'aire et de la co-aire

Les formules de l'aire et de la co-aire généralisent la formule de changement de variables classique. De nombreuses formules intégrales comme les relations de Fubini, intégrales sphériques, formule de Kac pour les domaines nodaux etc., sont en fait des applications immédiates de celles-ci. Les deux formules font appels à la notion de jacobien  $k$ -dimensionnel ce qui en fait d'excellentes illustrations pour l'agreg, que l'on peut recaser aussi bien en analyse qu'en algèbre, par exemple dans les leçons sur les matrices, le déterminant, le rang, la dimension, l'orthogonalité, les intégrales multiples, le calcul différentiel etc. Le contenu de cette section se trouve par exemple dans l'excellent chapitre 5, p.121 et suivantes de [KP08], ou encore dans la section 3.2 de [Fed69].

Rappelons tout d'abord la formule de changement de variables classique.

**Proposition 2.** *Si  $\Phi$  est un  $C^1$ -difféomorphisme d'un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  dans  $\Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$  et si  $f$  est une fonction mesurable positive ou telle que  $f|_{J_\Phi} \in \mathbb{L}^1(\Omega)$ , alors*

$$\int_{\Phi(\Omega)} f \circ \Phi^{-1}(y) \mathcal{H}^n(dy) = \int_{\Omega} f(x) |J_\Phi(x)| \mathcal{H}^n(dx),$$

où  $J_\Phi(x) = \det(D_x \Phi)$  est le jacobien de  $\Phi$ .

Les formules de l'aire et de la co-aire sont des analogues de la formule ci-dessus dans les cas où la fonction  $\Phi$  est définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  avec  $m \neq n$ . Pour les énoncer, on a besoin d'étendre la notion de jacobien, qui comme on l'a vu plus haut dans le cas classique, correspond à un rapport de volumes.

**Définition 5.** *Soit  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application différentiable en un point  $a \in \mathbb{R}^n$  et soit  $k \leq n$ , alors on définit le jacobien  $k$ -dimensionnel de  $\Phi$  en  $a$  par*

$$J_\Phi^k(a) = \sup \left\{ \frac{\mathcal{H}^k(D_a f(P))}{\mathcal{H}^k(P)}, P \text{ pavé } k\text{-dimensionnel de } \mathbb{R}^n \right\}.$$

Le calcul explicite de jacobien se déduit alors du lemme suivant (bon exercice pour l'agreg) :

**Lemme 1.** *Si  $P = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$  est un pavé engendré par des vecteurs  $(v_i)_{1 \leq i \leq k}$  de  $\mathbb{R}^n$ , alors le volume  $k$ -dimensionnel de  $P$  est donné par  $\sqrt{\det(V^t V)}$  où  $V$  est la matrice de taille  $n \times k$  dont les colonnes sont les  $v_i$ .*

Précisément, selon les dimensions respectives des espaces de départ et d'arrivée, le jacobien de la définition 5 ci-dessus s'exprime comme suit.

**Lemme 2.** *Soit  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application différentiable en  $a$ .*

1. *Si  $m = n$ , alors*

$$J_\Phi^m(a) = J_\Phi^n(a) = |\det(D_a \Phi)|.$$

2. *Si  $n \leq m$ , alors*

$$J_\Phi^n(a) = \sqrt{\det[(D_a \Phi)^t (D_a \Phi)]}.$$

3. *Si  $n \geq m$ , alors*

$$J_\Phi^n(a) = \sqrt{\det[(D_a \Phi)(D_a \Phi)^t]}.$$

**Proposition 3** (Formule de l'aire). *Soient  $\Phi$  est une application différentiable d'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$  et  $f$  est une fonction mesurable positive ou telle que  $f|J_\Phi| \in \mathbb{L}^1(\Omega)$ . Si  $n \leq m$ ,*

$$\int_{\Omega} f(x)|J_\Phi^n(x)|\mathcal{H}^n(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\Phi^{-1}(y)} f(x)\mathcal{H}^0(dx) \right) \mathcal{H}^m(dy).$$

**Remarque 1.** *La mesure  $\mathcal{H}^0$  n'est autre que la mesure de comptage de sorte que la formule de l'aire s'écrit encore*

$$\int_{\Omega} f(x)|J_\Phi^m(x)|\mathcal{H}^n(dx) = \int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{x \in \Phi^{-1}(y)} f(x) \right) \mathcal{H}^m(dy).$$

**Proposition 4** (Formule de la co-aire). *Soient  $\Phi$  est une application différentiable d'un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  dans  $\Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^m$  et  $f$  est une fonction mesurable positive ou telle que  $f|J_\Phi| \in \mathbb{L}^1(\Omega)$ . Si  $n \geq m$ ,*

$$\int_{\Omega} f(x)|J_\Phi^n(x)|\mathcal{H}^n(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\Phi^{-1}(y)} f(x)\mathcal{H}^{n-m}(dx) \right) \mathcal{H}^m(dy)$$

**Exemples :** Voici quelques exemples d'application de la formule de la co-aire.

1. Remarquons que, si  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , alors  $|J_\Phi^n(x)| = |\nabla_x \Phi|$ . Si de plus  $\Phi(x) = \|x\|$ , on a  $|J_\Phi^n(x)| = 1$  partout sauf en l'origine. Comme l'image de  $\Phi$  est  $\mathbb{R}^+$ , la formule de la co-aire donne

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathcal{H}^n(dx) = \int_0^{+\infty} \left( \int_{\partial B(0,r)} f(x)\mathcal{H}^{n-1}(dx) \right) dr,$$

qui n'est autre que la formule d'intégration en coordonnées sphériques.

2. Soit maintenant  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  la projection  $\phi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$ . Alors  $|J_\Phi^n(x)| = 1$  et l'on a alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathcal{H}^n(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-m}} f(x_1, \dots, x_n)\mathcal{H}^{n-m}(dx_{m+1}, \dots, dx_n) \right) \mathcal{H}^m(dx_1, \dots, dx_m),$$

qui n'est autre que le théorème de Fubini.

3. Soit  $\Phi$  une fonction lisse de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . On désigne par  $Z_\Phi$  son domaine nodal, i.e. le lieu des ses zéros  $Z_\Phi := \{x \in \mathbb{R}^n, \Phi(x) = 0\}$ . On suppose que  $\Phi$  est non dégénérée au sens où  $\nabla_x \Phi \neq 0$  si  $x \in Z_\Phi$ . Si  $f$  est intégrable, la formule de la co-aire donne alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)|\nabla_x \Phi|\mathcal{H}^n(dx) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\Phi^{-1}(y)} f(x)\mathcal{H}^{n-m}(dx) \right) dy.$$

En prenant pour  $f$  la fonction  $f(x) = (2\varepsilon)^{-1}\chi(\Phi(x)/\varepsilon)$  où  $\chi$  est l'indicatrice de  $[-1, 1]$ , qui est constante sur les lignes de niveaux de  $\Phi$ , il vient

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \chi\left(\frac{\Phi(x)}{\varepsilon}\right) |\nabla_x \Phi|\mathcal{H}^n(dx) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathcal{H}^{n-1}(\Phi^{-1}(y))dy.$$

Comme  $\Phi$  est non-dégénérée, en faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro, on obtient

$$\mathcal{H}^{n-1}(Z_\Phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \chi\left(\frac{\Phi(x)}{\varepsilon}\right) |\nabla_x \Phi|\mathcal{H}^n(dx) =: \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x \Phi|\delta_{\Phi(x)=0}\mathcal{H}^n(dx).$$

### 3 Théorème d'inversion locale

#### 3.1 Le théorème d'inversion locale

**Théorème 1** (d'inversion locale). Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $x$  un point de  $U$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^1$ . On suppose que  $D_x f$  est inversible. Alors il existe des ouverts  $V$  et  $W$  tels que  $x \in V \subset U$  et  $f(x) \in W$  et tels que la restriction de  $f$  à  $V$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$  sur son image  $W = f(V)$ .

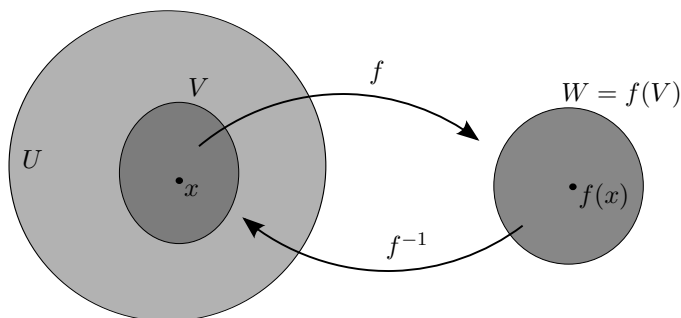


FIGURE 1 – Difféomorphisme local entre deux ouverts de l'espace euclidien.

**Remarque 2.** La preuve du théorème d'inversion locale repose essentiellement sur argument de point fixe. On peut en trouver une heuristique p. 181 de [Rou03] et une preuve détaillée dans l'exercice 71 p. 213 du même [Rou03]. Voir également les notes d'Ismael Bailleul (2013-2014) sur la page de la prépa agreg.

Le résultat suivant donne une version globale du théorème d'inversion. On rappelle qu'une application  $f$  est dite propre si l'image réciproque de tout compact par  $f$  est compacte. Dans l'espace euclidien, cela revient à dire que  $\|f(x)\|$  tend vers l'infini avec  $\|x\|$ .

**Théorème 2** (d'inversion globale, Hadamard-Lévy). Soient  $f$  une application de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même ;
2.  $f$  est propre et sa différentielle est inversible en tout point.

On trouvera une jolie démonstration du résultat ci-dessus (dans le cas  $C^2$ ) dans la quatrième édition de [QZ13] p. 399. On trouvera des preuves alternatives dans les éditions précédentes du Zuily-Queffelec ou sous des hypothèses plus fortes dans l'exercice 70 p. 212 de [Rou03] ou le théorème 2.1 p 131 de Avez.

**Remarque 3.** La démonstration de [QZ13] permet de proposer ce résultat comme développement dans différentes leçons, théorème d'inversion local bien sûr, mais aussi les leçons concernant les équations différentielles, la connexité etc.

#### 3.2 Exemples d'applications du théorème d'inversion locale

On donne ici quelques exemples d'applications du théorème d'inversion locale. Outre les applications en géométrie que nous verrons dans les séances suivantes, vous en trouverez bien d'autres dans les livres cités dans ce document, en particulier dans l'excellent [Rou03].



### 3.2.1 Petits sous-groupes de $GL(\mathbb{R}^n)$

**Proposition 5.** *Il n'existe pas dans  $GL(\mathbb{R}^n)$  de sous-groupes arbitrairement petits, au sens où il existe un voisinage  $U$  de l'identité tel que tout sous-groupe de  $GL(\mathbb{R}^n)$  contenu dans  $U$  est trivial i.e. réduit à l'identité*

*Démonstration.* Voir cours ou [MT86] p. 59. □

**Remarque 4.** *Ce résultat peut être naturellement recasé dans de nombreuses leçons : exponentielle de matrice, groupe linéaire, action etc.*

### 3.2.2 Théorème du rang constant

Dans ce paragraphe, on considère  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  une application de classe  $C^1$ . Si  $r$  est un entier compris entre 1 et  $p$ , on désigne par  $\pi_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  l'application linéaire de projection  $\pi_r(x_1, \dots, x_n) := (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ .

**Théorème 3** (du rang constant, [Rou03] exercice 74 p. 223). *Si  $D_x f$  est de rang constant égal à  $r$  lorsque  $x$  parcourt  $U$ , alors on peut associer à chaque  $x_0 \in U$  des voisinages  $U_0 \subset U$  et  $V_0 \subset \mathbb{R}^p$  de  $x_0$  et  $f(x_0)$  respectivement, sur lesquels sont définis des difféomorphismes  $g : U_0 \rightarrow U_0$  et  $h : V_0 \rightarrow V_0$  tels que  $f = h \circ \pi_r \circ g$ .*

*Démonstration.* Voir exercice 74 p. 222 de [Rou03] ou exercice 10 p. 44 de [Laf96]. □

### 3.2.3 Réduction des formes quadratique, lemme de Morse

Soient  $\mathcal{S}$  l'ensemble des matrices symétriques réelles et  $A$  une matrice inversible de  $\mathcal{S}$ . On peut montrer qu'il existe alors un voisinage de  $A$  dans  $\mathcal{S}$  composé de matrices inversibles. En effet, notons  $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM \in \mathcal{S}\}$ , on a le lemme :

**Lemme 3.** *L'application  $\varphi : E \rightarrow \mathcal{S}$  telle que  $\varphi(M) := M^*AM$  est un difféomorphisme local entre un voisinage de l'identité dans  $E$  et un voisinage de  $A$  dans  $\mathcal{S}$ .*

*Démonstration.* D'après le théorème d'inversion locale, il suffit de voir que la différentielle  $D_{Id}\varphi$ , donnée par  $(D_{Id}\varphi)(H) = (AH)^* + AH = 2AH$ , est inversible. Elle est injective car  $A$  est inversible puis bijective car les espaces vectoriels  $\mathcal{S}$  et  $E$  sont de même dimension. □

**Théorème 4** (Lemme de Morse). *Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^3$  de différentielle nulle en zéro. On suppose que la différentielle seconde  $D_0^2 f$  est non dégénérée et on note  $q_0$  la forme quadratique associée. Alors, il existe un voisinage  $U$  de zéro et un difféomorphisme  $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$  tel que pour tout  $x \in U$  :*

$$f(x) = q_0(\Phi(x)).$$

*Démonstration.* Voir cours ou [Rou03] exercice 114 p. 344 ou [Laf96] exercice 11 p. 45. □

## 4 Théorème des fonctions implicites

### 4.1 Énoncé du théorème

**Théorème 5** (des fonctions implicites). Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ ,  $(x_0, y_0)$  un point de  $U$  et  $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = (f^1(x, y), \dots, f^d(x, y))$  une application de classe  $C^1$  de  $U$  dans  $\mathbb{R}^d$ . On suppose que  $f(x_0, y_0) = 0$  et que la différentielle partielle

$$D_y f(x_0, y_0) := \left( \frac{\partial f^i}{\partial y_j}(x_0, y_0) \right)_{(i,j) \in \{1, \dots, d\}^2}$$

est inversible. Alors il existe un voisinage de  $(x_0, y_0)$  de la forme  $V \times W \subset U$ , et une application  $\varphi : V \rightarrow W$  de classe  $C^1$ , unique, tels que

$$((x, y) \in V \times W \text{ et } f(x, y) = 0) \iff (x \in V \text{ et } y = \varphi(x)).$$

De plus  $D_y f(\cdot, \cdot)$  est inversible en tout point de  $V \times W$ .

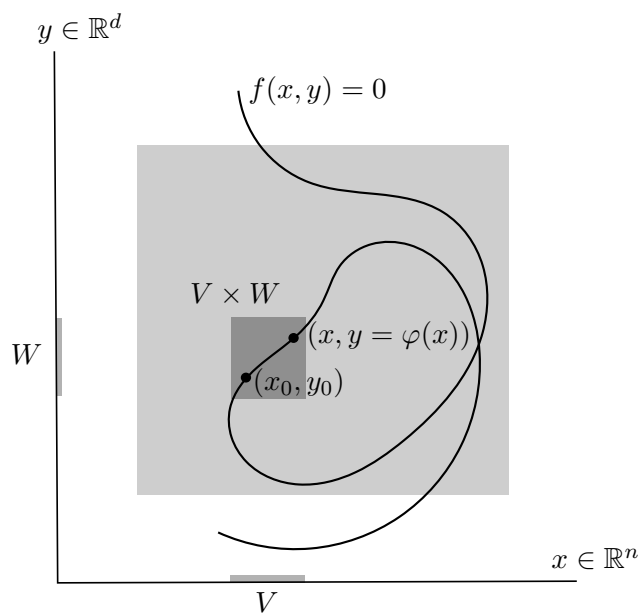


FIGURE 2 – Structure de graphe locale.

*Démonstration.* Comme pour le théorème d'inversion locale, la preuve classique repose sur un argument de point fixe, voir exercice 86 p. 251 de [Rou03].  $\square$

### 4.2 Exemples d'applications

Comme dans le cas du théorème d'inversion locale, vous trouverez de nombreuses applications dans les livres cités dans ce document. En voici quelques unes.

### 4.2.1 Des polynômes et leurs racines

**Exercice 5** (Équation du troisième degré, [Rou03] exercice 78 p. 234). On note  $x, p, q$  trois variables réelles. L'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

définit-elle  $x$  comme fonction implicite de  $p$  et  $q$ ? On illustrera la discussion en esquissant la surface d'équation  $x^3 + px + q = 0$  dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  des coordonnées  $(q, p, x)$ .

**Exercice 6.** *Fonction racine* Soit  $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $x_0$  une racine simple de  $P_0$ . Montrer qu'il existe un voisinage  $U$  de  $P_0$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$ , un voisinage  $V$  de  $x_0$  et une fonction "racine"  $r$  de  $U$  dans  $V$  telle que  $r(P)$  soit une racine de  $P$  pour tout  $P$  dans  $U$ .

### 4.2.2 Des fonctions et leurs zéros

Dans le cas analytique, le théorème de Hurwitz assure en général que les zéros d'une fonction dépendent continument de celle-ci. Cela reste vrai pour des topologies plus faibles, par exemple pour la topologie  $C^1$  sur les compacts. On peut par exemple montrer le résultat suivant, qui affirme que le volume d'un domaine nodal est une fonctionnelle continue.

**Théorème 6.** *Soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  une suite de fonctions régulières de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}$  qui converge vers une fonction  $f$  pour la topologie  $C^1$  sur les compacts de  $\mathbb{R}^d$ . On suppose que la fonction limite est non-dégénérée au sens où  $\nabla_x f \neq 0$  si  $f(x) = 0$ . Alors, pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}^d$ , on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{H}^{d-1}(\{f_n = 0\} \cap K) = \mathcal{H}^{d-1}(\{f = 0\} \cap K).$$

### 4.2.3 Champ de vecteur dépendant du temps

Dans la preuve du théorème d'inversion globale d'Hadamard-Lévy, nous avons introduit une famille d'applications  $g_t$  associée à un champ de vecteurs dépendant du temps. Il s'agit d'un exemple de la méthode du chemin qui fait naturellement intervenir des champs inhomogènes en temps.

**Théorème 7.** *Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $X$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$  sur  $U$ . Alors, pour chaque  $t_0 \in \mathbb{R}$  et chaque  $x_0 \in U$ , il existe un voisinage  $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \times V_0$  de  $(t_0, x_0)$  et une application  $\varphi : ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \times V_0 \rightarrow U$  tels que*

1.  $\varphi$  est de classe  $C^1$  ;
2.  $\varphi(t_0, x) = x$  pour tout  $x \in V_0$  ;
3.  $\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) = X(\varphi(t, x))$  pour  $(t, x) \in ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \times V_0$ .

*Démonstration.* Voir l'appendice G p. 140 de [Ave97] ou la section F p. 111 de [Laf96]. □

## 5 Sous-variétés de l'espace euclidien

Commençons par rappeler la définition d'une sous-variété euclidienne et ses différentes caractérisations (graphe, implicite, paramétrée). De très bonnes références pour cette partie sont [BG87] p. 56 à 59 ou encore [Laf96], section D, p. 28 à 34.

## 5.1 Définitions équivalentes des sous-variétés

**Définition 6.** On dit qu'un ensemble  $M \subset \mathbb{R}^n$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $d$  si pour tout point de  $x$  de  $M$ , il existe

- des voisinages  $U$  et  $V$  de  $x$  et  $0$  dans  $\mathbb{R}^n$  ;
- un difféomorphisme  $f : U \rightarrow V$  ;

tels que

$$f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\}).$$

On dit alors que  $M$  est de codimension  $n - d$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

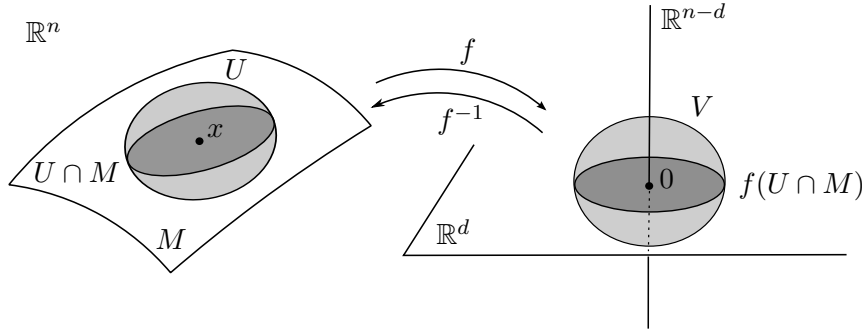


FIGURE 3 – Sous-variété de l'espace euclidien.

Autrement dit, localement l'ensemble  $M$  peut "s'identifier" à un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . Les différentes caractérisations ci-dessous peuvent être considérées comme autant de définitions alternatives de la notion de sous-variété euclidienne.

**Théorème 8.** Soit  $M$  un sous ensemble de  $\mathbb{R}^n$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. **Définition.**  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $d$ .
2. **Description implicite.** Pour tout point de  $x$  de  $M$ , il existe
  - un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  ;
  - une submersion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$  ;

tels que

$$U \cap M = g^{-1}(0).$$

3. **Paramétrage.** Pour tout  $x \in M$ , il existe
  - un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  ;
  - un voisinage  $\Omega$  de  $0$  dans  $\mathbb{R}^d$  ;
  - une application  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ;
tels que  $h$  est à la fois une immersion dans  $\mathbb{R}^n$  et un homéomorphisme de  $\Omega$  sur  $U \cap M$ .
4. **Graphe.** Pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in M$ , il existe
  - un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  ;
  - un voisinage  $V$  de  $(x_1, \dots, x_d)$  dans  $\mathbb{R}^d$  ;
  - $(n - d)$  fonctions  $g_i : V \rightarrow \mathbb{R}$  ;
tels que, à permutation éventuelle des coordonnées  $x_i$ ,

$$x \in U \cap M \iff \begin{cases} (x_1, \dots, x_d) \in V, \\ x_{d+1} = g_1(x_1, \dots, x_d), \\ \vdots \\ x_n = g_{n-d}(x_1, \dots, x_d). \end{cases}$$

*Démonstration.* On désigne par  $i$  l'injection canonique de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

1  $\Rightarrow$  3. Soit  $f$  le difféomorphisme défini sur un voisinage  $U$  de  $x \in M$  dont le point 1) affirme l'existence. Alors  $\Omega = f(U \cap M) \cap \mathbb{R}^d$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  et  $h = f^{-1} \circ i$  est à la fois une immersion dans  $\mathbb{R}^n$  et un homéomorphisme de  $\Omega$  sur  $U \cap M$ .

1  $\Rightarrow$  2. Notons  $f = (f^1, \dots, f^n)$  les composantes de  $f$ . Comme  $f$  est un difféomorphisme de  $U$  sur son image, les différentielles  $D_x f_i$  sont linéairement indépendantes en tout point de  $x \in U$ . Posons alors  $g = (f^{d+1}, \dots, f^n)$ . On a bien une submersion de  $U$  dans  $\mathbb{R}^{n-d}$  telle que  $M \cap U = g^{-1}(0)$ .

3  $\Rightarrow$  1. Supposons que le point 3) est vérifié. Quitte à restreindre  $\Omega$ , il existe un alors difféomorphisme  $\varphi$  d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $x = h(0)$  tel que

$$\varphi \circ h(x^1, \dots, x^d) = (x^1, \dots, x^d, 0, \dots, 0).$$

On a alors

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(h(\Omega)) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}).$$

2  $\Rightarrow$  1. Si  $g$  est une submersion, quitte à restreindre  $U$ , il existe un difféomorphisme  $\psi : U \rightarrow \psi(U)$

$$g \circ \psi(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^{n-d}).$$

On conclut alors comme plus haut.

2  $\Leftrightarrow$  4. Si  $M$  est localement le graphe de  $G = (G^1, \dots, G^{n-d}) : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ , alors l'application

$$g : x \mapsto (x^{i+d} - G^i(x^1, \dots, x^d))_{1 \leq i \leq n-d}$$

est une submersion licite quitte à restreindre son ouvert de définition. Réciproquement, si on dispose d'une telle submersion, quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que la matrice  $(\partial_{i+d} g^j(x))_{1 \leq i, j \leq n-d}$  est inversible. D'après le théorème d'inversion locale appliqué à

$$F : x \mapsto (x^1, \dots, x^d, g^1(x), \dots, g^{n-d}(x)).$$

Son inverse local est de la forme

$$F^{-1} : x \mapsto (x^1, \dots, x^d, \gamma^1(x), \dots, \gamma^{n-d}(x)),$$

ce qui fait apparaître  $M$  comme le graphe de

$$G : (x^1, \dots, x^d) \mapsto (\gamma^j(x^1, \dots, x^d, 0, \dots, 0))_{1 \leq j \leq n-d}.$$

□

## 5.2 Premiers exemples et contre-exemples

Sous forme d'exercices, voici quelques premiers (contre-)exemples de sous-variétés euclidiennes. On en trouvera de nombreux autres dans [Rou03] ou [BG87] par exemple.

**Exercice 7** ([BG87], exemple 2.1.6.1 p. 59). *Démontrer de plusieurs façons que si  $V \subset \mathbb{R}^n$  et  $W \subset \mathbb{R}^m$  sont des sous-variétés, alors  $V \times W$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ .*

**Exercice 8** ([BG87], exemple 2.1.6.2 p. 60). *Montrer que la sphère unité de l'espace euclidien  $\mathbb{S}^d := \{x = (x_1, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}, x_1^2 + \dots + x_{d+1}^2 = 1\}$  est une sous-variété compacte de  $\mathbb{R}^{d+1}$  de dimension  $d$ .*

**Exercice 9** ([Laf96], variante autour de l'exemple p.33). Soit l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $f(t) := (t^2, t^3)$ . L'image de  $f$  est-elle une sous-variété? Même question pour l'application  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $g(t) := (t, t^2, t^3)$ .

**Exercice 10** ([Laf96], contre-exemple p. 32). Pour quelles valeurs de  $\alpha \in \mathbb{R}$  l'application

$$g : t \mapsto (\cos(t), \sin(t), \cos(\alpha t), \sin(\alpha t))$$

paramètre- $t$ -elle sous-variété de  $\mathbb{R}^4$  ?

**Exercice 11** ([BG87], exercice 2.8.9 p. 109). Soit  $H$  une hyperquadrique de  $\mathbb{R}^d$  d'équation

$$\sum_{1 \leq i < j \leq d} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^d b_i x_i = 1,$$

où  $(a_{ij})$  est une matrice symétrique inversible. Montrer que  $H$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^d$  de dimension  $d - 1$ , difféomorphe à  $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{d-1-k}$ , l'entier  $d - k$  étant le nombre de carrés négatifs de la forme quadratique associée à la matrice  $(a_{ij})$ .

**Exercice 12** (Grassmannienne, [Pos90] exercice 1 p. 161). Montrer que l'ensemble  $G(m, n)$  des sous-espaces vectoriels de dimension  $m$  dans  $\mathbb{R}^n$  est une sous-variété de dimension  $m(n - m)$ .

### 5.3 Sous-groupes de matrices

Les sous-groupes de matrices classiques sont abordés comme exemples de sous-variétés euliennes dans de nombreux ouvrages. Ces exemples et les résultats associés permettent d'illustrer de nombreuses leçons en algèbre/analyse/géométrie. Vous pourrez par exemple consulter les exercices 94 et 95 p. 275–278 de [Rou03], les exercices 2.8.10–11 p. 110 de [BG87], l'excellente leçon 11 de [Pos90] ou encore la section 3.4 p. 64–71 de la référence classique [MT86].

**Exercice 13** (Sous-groupes de matrices).

1. Montrer que  $SL_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices  $n \times n$  réelles de déterminant 1 est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Quelle est sa (co)dimension ?
2. Montrer que  $O_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonales  $n \times n$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Quelle est sa (co)dimension ?
3. Montrer que le sous-ensemble  $V_r$  de  $M_n(\mathbb{R})$  formé des matrices de rang  $0 < r < n$  est une sous-variété de dimension  $n^2 - (n - r)^2$ .  
Indication : soit  $U$  le sous-ensemble de  $M_n(\mathbb{R})$  formé des matrices dont le premier mineur de taille  $r \times r$  (en haut à gauche) est non nul. Montrer que si  $X \in M_n(\mathbb{R})$  s'écrit

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

avec  $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$  et  $D \in M_{n-r}(\mathbb{R})$ , alors  $X$  appartient à  $V_r \cap U$  si et seulement si  $A$  est inversible et  $D = CA^{-1}B$ .

Le théorème suivant caractérise les morphismes continus de la droite réelle dans le groupe des matrices inversibles.

**Théorème 9** ([Laf96] p. 37). *Si  $f$  est un homomorphisme continu du groupe additif  $(\mathbb{R}, +)$  dans  $GL_n(\mathbb{R})$ , alors il existe un unique endomorphisme  $A$  tel que  $f(t) = e^{tA}$ .*

**Remarque 5.** *Réciproquement, si  $A$  est un endomorphisme, alors  $f(t) = e^{tA}$  est bien un homomorphisme continu de  $(\mathbb{R}, +)$  dans  $GL_n(\mathbb{R})$ .*

*Démonstration.* Voir cours ou [Laf96] p. 37. □

La proposition suivante montre que les sous-groupes classiques des matrices, dont on a vu qu'ils sont des exemples de sous-variété euclidienne, sont en fait paramétrés via l'application exponentielle.

**Proposition 6** (Paramétrisation exponentielle des groupes classiques, [Laf96] p. 38).

1. *Il existe un voisinage  $U$  de zéro dans l'ensemble des matrices de trace nulle tel que l'application l'exponentielle restreinte à  $U$  soit une paramétrisation de  $SL_n(\mathbb{R})$ .*
2. *Il existe un voisinage  $V$  de zéro dans l'ensemble des matrices antisymétriques tel que l'application l'exponentielle restreinte à  $V$  soit une paramétrisation de  $O_n(\mathbb{R})$ .*

*Démonstration.* Voir cours ou [Laf96] p. 38. □

Plus généralement, si  $G$  est un sous-groupe fermé de  $GL_n(\mathbb{R})$ , on introduit l'ensemble

$$\mathfrak{g} := \{X \in M_n(\mathbb{R}), \exp(tX) \in G, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

L'ensemble  $\mathfrak{g}$  n'est autre que l'algèbre de Lie de  $G$ , mais rappelons que cette notion n'est pas exigible à l'agrégation. On a alors le résultat suivant :

**Théorème 10** ([MT86], théorème 3.4.3 p. 66). *Soit  $G$  est un sous-groupe fermé de  $GL_n(\mathbb{R})$ , alors il existe un voisinage  $U$  de zéro dans  $\mathfrak{g}$  et un voisinage  $V$  de l'identité dans  $G$ , tels que l'exponentielle réalise un homéomorphisme de  $U$  dans  $V$ .*

Ce résultat est le point clef dans la démonstration du théorème de (Cartan)–Von Neumann :

**Théorème 11** (de Von Neumann, [MT86] p. 68). *Tout sous-groupe fermé non discret de  $GL_n(\mathbb{R})$  est une sous-variété.*

## 6 Espace tangent à une sous-variété

On revient à présent sur la notion d'espace tangent à une sous-variété euclidienne, notion importante grâce à laquelle certains énoncés se formulent / démontrent de façon limpide (le théorème des extrema liés par exemple).

### 6.1 Définition et exemples

**Définition 7.** *On dit qu'un vecteur  $v$  est tangent en un point  $x_0$  d'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  s'il existe une application différentiable  $\gamma$  d'un ouvert  $] - \varepsilon, \varepsilon[$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$  telle que  $\gamma(] - \varepsilon, \varepsilon[) \subset A$ ,  $\gamma(0) = x_0$  et  $\gamma'(0) = v$ .*

**Proposition 7** (Espace tangent à une sous-variété). *L'ensemble des vecteurs tangents en un point  $x_0$  d'une sous-variété  $M$  de dimension  $d$  de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $d$ .*

*Démonstration.* Soit  $x_0 \in M$  une sous-variété euclidienne de dimension  $d$  de  $\mathbb{R}^n$ . Par définition, il existe un voisinage  $U$  de  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^n$  et un difféomorphisme  $f : U \rightarrow f(U)$  tel que

$$f(U \cap M) = f(U) \cap \left( \mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\} \right).$$

Quitte à translater, on peut supposer que  $f(x_0) = 0$ . Alors, si  $v$  est un vecteur tangent à  $M$  en  $x_0$  associé à une courbe  $\gamma$ , i.e.  $\gamma(0) = x_0$  et  $\gamma'(0) = v$ , on a alors  $D_{x_0}f.v \in \mathbb{R}^d \times \{0\}$ . Inversement, si  $w \in \mathbb{R}^d \times \{0\}$ , en choisissant  $\varepsilon > 0$  assez petit de sorte que  $tw \in f(U)$  pour  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , on voit que la courbe  $t \mapsto f^{-1}(tw)$  définit un vecteur tangent à  $M$  au point  $x_0$ , à savoir le vecteur  $D_0f^{-1}w$ . Autrement dit, l'ensemble des vecteurs tangents en  $x_0$  s'identifie à l'image par l'application linéaire  $D_0f^{-1}$  de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ , d'où le résultat.  $\square$

**Définition 8.** *On note  $T_{x_0}M$  et on appelle espace tangent en  $x_0$  à  $M$  l'espace affine correspondant, i.e. l'ensemble des point  $x \in \mathbb{R}^n$  tels que le vecteur  $(x - x_0)$  est tangent à  $M$  en  $x_0$ .*

**Proposition 8** (Théorème 2.5.7 p. 86 de [BG87], [Laf96] p. 34). *Selon les définitions équivalentes de sous-variétés données ci-dessus, les espaces tangents en  $x_0$  sont donnés par*

**Formulation implicite.** *Si  $U \cap M = g^{-1}(0)$  où  $g$  est une submersion de  $U$  dans  $\mathbb{R}^{n-p}$ , alors*

$$T_{x_0}M = \text{Ker}(D_{x_0}g).$$

**Paramétrage.** *Si  $h : \Omega \subset \mathbb{R}^p$  est une immersion et un homéomorphisme d'un voisinage de  $0$  sur  $U \cap M$  tel que  $h(0) = x_0$  alors*

$$T_{x_0}M = \text{Im}(D_0h).$$

**Grphe.** *Si  $M = (V, G(V))$  avec  $V \subset \mathbb{R}^d$  et  $G = (g_1, \dots, g_{n-d})$  alors*

$$T_{x_0}M = \bigcap_{i=1}^{n-d} \text{Ker}(D_{x_0}(g_i - \text{Id})).$$



*Démonstration.*

**Formulation implicite.** Pour toute courbe  $\gamma$  tracée sur  $M$  définissant un vecteur tangent  $v$  en  $x_0$ , on a  $g(\gamma(t)) = g(x_0) = 0$  et donc  $D_{x_0}g.v = 0$ , ainsi  $T_{x_0}M \subset \text{Ker}(D_{x_0}g)$  et il y a en fait égalité comme les deux espaces ont même dimension.

**Paramétrage.** Soit  $v \in \mathbb{R}^d$  et  $\gamma$  une courbe tracée dans  $\Omega$  telle que  $\gamma(0) = 0$  et  $\gamma'(0) = v$ . Alors  $h \circ \gamma$  est une courbe dans  $M$  telle que  $h \circ \gamma(0) = x_0$ . Par définition de l'espace tangent, on a  $D_0h.v \in T_{x_0}M$ . Autrement dit,  $\text{Im}(D_0h) \subset T_{x_0}M$  et là encore il y a égalité car les dimensions sont les mêmes.

**Graph.** On se ramène à la définition implicite en considérant les applications  $g_i - \text{Id}$ . □

**Exemple 1.** Dans le cas de la sphère  $M = \mathbb{S}^d$  où  $g(x) := \|x\|^2 - 1$ , on a  $D_{x_0}g(x) = 2\langle x_0, x \rangle$  et  $T_{x_0}\mathbb{S}^d$  est l'hyperplan affine passant par  $x_0$  et orthogonal à  $x_0$ .

**Exercice 14.** Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , soit  $S_\lambda = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \lambda\}$ .

1. Déterminez les valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles  $S_\lambda$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Pour  $x, y \in \mathbb{R}^3$ , soit  $B(x, y) := x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$ . Exprimer  $T_xS_\lambda$  à l'aide de  $B$ .

**Exercice 15** ([Laf96], exercice 22 p. 47). Soit  $M \subset \mathbb{R}^3$  une surface contenant l'origine et qui s'écrit localement  $z = h(x, y)$ .

1. Déterminer son plan tangent à l'origine.
2. On note  $Q = D_0^2h$  la hessienne de  $h$  en l'origine. Montrer que lorsque  $Q$  est définie positive (ou définie négative), il existe un voisinage de 0 dans  $M$  situé d'un seul côté de  $T_0M$ . Que peut-on dire lorsque  $Q$  est dégénérée ?

**Exercice 16** (Retour sur les sous-groupes de matrices classiques, [Rou03] exercice 94 p. 276).

1. Montrer que l'espace tangent en l'identité à  $SL_n(\mathbb{R})$  est l'espace vectoriel des matrices de trace nulle.
2. Montrer que l'espace tangent en l'identité à  $O_n(\mathbb{R})$  est l'espace vectoriel des matrices anti-symétriques.

**Remarque 6.** Au vu de la proposition 1, l'application exponentielle restreinte à l'espace tangent en l'identité, est donc une paramétrisation des groupes considérés. La généralisation de ce résultat est la base de la théorie des groupes et algèbres de Lie, voir [MT86].

## 6.2 Extrema et points critiques

On s'intéresse maintenant aux problèmes d'extrema sur les sous-variétés euclidiennes ainsi qu'aux valeurs et points critiques des applications différentiables.

**Théorème 12.** Soient  $f$  et  $g_1, \dots, g_p$  des fonctions réelles de classe  $C^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $X$  le lieu d'annulation des  $g_i$  i.e.

$$X := \{x \in U, g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}.$$

Si la restriction de  $f$  à l'ensemble  $X$  admet un extremum local en  $x_0 \in X$  et si les différentielles  $(D_{x_0}g_i)_{i=1..p}$  sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ , appelés multiplicateurs de Lagrange, tels que

$$D_{x_0}f = \lambda_1 D_{x_0}g_1 + \dots + \lambda_p D_{x_0}g_p.$$

*Démonstration.* Supposons que l'application  $f$  admette un extremum local en  $x_0 \in X$ . Alors pour toute courbe lisse paramétrée  $\gamma$  passant  $x_0$  au temps 0, la fonction  $f \circ \gamma$  admet également un extremum local, i.e.  $D_{x_0}f \circ \gamma'(0) = 0$ . L'ensemble des vecteurs dérivés  $\gamma'(0)$  engendrant  $T_{x_0}X$  par définition, le fait que  $f$  admette un extremum local en  $x_0$  se traduit donc par le fait que la différentielle  $D_{x_0}f$  restreinte à  $T_{x_0}X$  est identiquement nulle :

$$D_{x_0}f|_{T_{x_0}X} \equiv 0.$$

La fin de la preuve se réduit à de l'algèbre linéaire puisque

$$T_{x_0}X = \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(g_i)$$

d'après la proposition 3 ci-dessus. Consulter [Ave97] p. 103 pour les détails.  $\square$

**Exercice 17** (Inégalités classiques, [Sch67] p. 292). Soit  $p > 1$  un réel. Pour  $x \in \mathbb{R}^n$ , on note  $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ . On souhaite montrer que  $\|\cdot\|_p$  satisfait l'inégalité triangulaire et fournit donc bien une norme.

1. On fixe  $a, b > 0$ . Montrer que  $S_{a,b} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \|x\|_p = a, \|y\|_p = b\}$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .
2. Chercher les extrema relatifs de la fonction  $\varphi : (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \|x + y\|_p^p$  sur la sous-variété  $S_{a,b}$ . Conclure.
3. Démontrer par la même méthode l'inégalité de Hölder dans le même contexte.

**Exercice 18** (Section 1.1.2 p. 11 de [Laf96] (dernière édition), exercice 132 p. 403 de [Rou03]). Soit  $D \subset \mathbb{R}^2$  un domaine convexe délimité par une courbe régulière  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  simple et fermée (périodique). On fixe  $n \geq 2$  un entier. On joue au billard dans  $D$  et on cherche une trajectoire qui se referme après exactement  $n$  rebonds sur le bord (réflexion cartésienne).

1. Trouver une solution lorsque  $n = 2$ .
2. On note  $\Gamma$  l'image de  $\gamma$ , i.e. le bord de  $D$  et on introduit l'application  $\ell : \Gamma^n \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$\ell(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n \|x_{i+1} - x_i\|,$$

où par convention on a posé  $x_{n+1} := x_1$ . Montrer que  $\ell$  atteint son maximum en un point  $(m_1, \dots, m_n) \in \Gamma^n$  où les  $m_i$  sont deux à deux distincts.

3. Constaté que l'on a ainsi produit une trajectoire qui se referme en  $n$  coups.

**Exercice 19** ([Rou03], exercice 131 p. 401). Soient  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble  $E$  à  $n$  éléments et  $f$  une fonction de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  non constante. On définit l'entropie (de Shannon) de la variable  $X$  comme suit :

$$H(X) := - \sum_{x \in E} \mathbb{P}(X = x) \log(\mathbb{P}(X = x)).$$

Quelle est la loi de  $X$  si l'entropie  $H(X)$  est maximale et que  $\mathbb{E}[f(X)]$  est fixé ?

Nous énonçons enfin quelques résultats de théorie de la mesure en lien avec les notions de sous-variété, de points et valeurs critiques des applications différentiables. Dans ce contexte de calcul/géométrie différentielle, ces résultats ont le mérite de faire intervenir des notions telles que la compacité, les formules de Taylor etc. et sont donc susceptibles d'être recasés ailleurs.

**Proposition 9** ([Laf96] p. 38). *Soit  $M$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $d < n$ . Alors  $M$  est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^n$ .*

*Démonstration.* On commence par montrer le lemme suivant :

**Lemme 4.** *Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ . L'image par  $f$  d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle.*

*Preuve du lemme.* Soit  $E$  un tel ensemble, il suffit de voir que pour toute boule fermée  $B \subset U$ ,  $f(E \cap B)$  est de mesure nulle. Si  $K := \sup_{x \in B} \|D_x f\|$ , le théorème des accroissements finis montre que  $f$  est  $K$ -lipschitzienne sur  $B$  et envoie donc tout pavé de mesure  $\delta$  sur un ensemble de mesure au plus  $K^n \delta$ . Soit alors  $C$  une réunion de tels pavés recouvrant  $E \cap B$  et telle que  $\lambda(C) \leq \varepsilon$ . Alors

$$\lambda(f(B \cap E)) \leq \lambda(f(C)) \leq K^n \varepsilon,$$

d'où le résultat. □

Revenons à la preuve de la proposition. Il suffit de montrer que  $M$  est contenue dans un ouvert  $U$  tel que  $U \cap M$  est de mesure nulle. D'après la définition d'une sous-variété euclidienne, il existe un ouvert  $U$  et un difféomorphisme  $f : U \rightarrow V$  tel que

$$f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}).$$

Le membre de droite est bien sûr de mesure nulle (pour la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^n$ ) et on conclut grâce au lemme précédent appliqué à l'inverse de  $f$ . □

**Définition 9.** *Si  $f$  est une application lisse de  $U \subset \mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^n$ , un point  $x \in U$  est dit critique si le rang de  $D_x f$  est strictement inférieur à  $n$ . L'image d'un point critique est appelée valeur critique. Les points non critiques sont dits réguliers.*

**Théorème 13** (Lemme de Sard, [Laf96] p. 39). *L'ensemble des valeurs critiques d'une application lisse de  $U \subset \mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^n$  est de mesure nulle.*

*Démonstration.* On donne la preuve dans le cas  $m \leq n$ , l'autre cas est plus difficile. Tout d'abord, si  $m < n$ , tous les points sont critiques et on peut appliquer le lemme précédent à l'application  $g : U \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par  $g(x, y) = f(x)$ , d'où le résultat. Supposons donc que  $m = n$ . On a alors le lemme suivant :

**Lemme 5.** *Si  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $U$ , pour tout compact convexe  $K \subset U$ , il existe un réel  $\alpha > 0$  et une fonction  $\kappa : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant  $\lim_{t \rightarrow 0} \kappa(t) = 0$ , tels que*

$$\|f(y) - f(x) - (D_x f)(y - x)\| < \kappa(\|x - y\|) \times \|x - y\|, \quad \forall x, y \in K, \|x - y\| < \alpha.$$

*Preuve du lemme.* On écrit la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 D_{x+t(y-x)} f(y-x) dt,$$

puis on utilise la continuité uniforme de  $x \mapsto D_x f$  sur le compact  $K$  :

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x) - D_x f(y-x)\| &= \left\| \int_0^1 [D_{x+t(y-x)} f - D_x f] (y-x) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \| [D_{x+t(y-x)} f - D_x f] (y-x) \| dt \\ &\leq \int_0^1 \| [D_{x+t(y-x)} f - D_x f] \| dt \times \|x-y\|. \end{aligned}$$

□

On revient à la preuve du théorème. Soit  $C$  l'ensemble des points critiques de  $f$ . Il suffit de montrer que  $f(C \cap A)$  est de mesure nulle pour tout cube  $A$ . Si  $x \in C$ , alors l'image de  $D_x f$  est contenue dans un hyperplan  $H$  de  $\mathbb{R}^n$ . Soit alors  $r > 0$  et  $y$  tel que  $\|y-x\| < r$ . D'après le dernier lemme, la distance de  $f(y)$  à l'hyperplan  $H'$  parallèle à  $H$  et passant par  $f(x)$  est inférieure à  $\kappa(r)$ . D'autre part, si  $K = \sup_{x \in B} \|D_x f\|$ , on a  $\|f(x) - f(y)\| < Kr$ . Ainsi  $f(B(x, r))$  est inclus dans un cylindre de base  $H' \cap B(f(x), Kr)$  et de hauteur  $2r\kappa(r)$ . En particulier, on a

$$\lambda(f(B(x, r))) \leq \frac{1}{K} \times (2rK)^n \kappa(r).$$

Soit  $a$  le côté du cube  $A$ , qui est donc inclus dans au plus  $(ak)^n$  cubes de côté  $1/k$ . Chaque tel cube rencontrant  $C$  peut lui-même être inclus dans une boule  $B(x, 2\sqrt{n}/k)$  où  $x \in C$ . Finalement, si  $w_n r^n$  est le volume euclidien d'une boule de rayon  $r$ , on a

$$\lambda(f(A \cap C)) \leq \frac{w_n}{K} \left( ak \times 2 \times \frac{2\sqrt{n}}{k} \times K \right)^n \kappa \left( \frac{2\sqrt{n}}{k} \right) \leq C(n, a, K) \kappa \left( \frac{2\sqrt{n}}{k} \right),$$

d'où la conclusion en faisant tendre  $k$  vers l'infini. □

Pour finir sur une note culturelle, notons que le lemme de Sard est un pas important vers la démonstration du théorème de plongement de Whitney, qui montre que "toute" variété abstraite de dimension  $n$  peut être vue comme une sous-variété d'un espace euclidien de dimension suffisante :

**Théorème 14** (Théorème de Whitney, [Pos90], leçons 14 (énoncé) et 15 (preuve)).

*Toute variété différentiable séparée de dimension  $n$  et satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité est plongeable dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .*

## 7 Courbes : propriétés locales

Nous rappelons ici quelques résultats concernant les courbes de l'espace euclidien. Celles-ci seront tout à tour vues comme des courbes paramétrées, c'est-à-dire images d'applications  $t \mapsto f(t)$  d'un intervalle de  $\mathbb{R}$ , ou comme solutions d'équations. Il est important de savoir passer d'une représentation à l'autre. On s'intéressera tout d'abord aux propriétés locales des courbes puis à leurs propriétés globales. Dans toute la suite  $I$  désignera un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 10** (Abscisse curviligne ou longueur d'arc, proposition VIII.4.3 p. 305 de [Aud06]). Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe régulière de classe  $C^1$ . On fixe un point  $t_0 \in I$  et on définit, pour tout  $t \in I$ ,

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du.$$

Alors  $\varphi$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$  de  $I$  sur son image  $J = \varphi(I)$ . L'application  $g := f \circ \varphi^{-1}$  est un paramétrage de la même courbe qui vérifie  $\|g'(s)\| = 1$  pour tout  $s \in J$ . On dit alors que la courbe est paramétrée par la longueur d'arc ou abscisse curviligne.

*Démonstration.* La courbe étant supposée régulière, le vecteur  $f'(t)$  ne s'annule pas sur  $I$  et comme la norme  $x \mapsto \|x\|$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , la fonction  $\varphi$  est de classe  $C^1$ . La norme de la dérivée  $\|f'(t)\|$  est strictement positive pour tout  $t$ . La fonction  $\varphi$  est donc strictement croissante et admet une fonction réciproque elle aussi de classe  $C^1$ . Le vecteur dérivé de la composée  $g$  est

$$g'(s) = f' \circ \varphi^{-1}(s)(\varphi^{-1})'(s) = \frac{f' \circ \varphi^{-1}(s)}{\varphi' \circ \varphi^{-1}(s)} = \frac{f' \circ \varphi^{-1}(s)}{\|f' \circ \varphi^{-1}(s)\|},$$

qui est bien unitaire. □

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une courbe régulière de classe  $C^k$  avec  $k \geq 2$ , alors son développement de Taylor au voisinage d'un point  $t_0 \in I$  est de la forme

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 f''(t_0) + o((t - t_0)^2).$$

Si  $f'(t_0)$  et  $f''(t_0)$  sont deux vecteurs indépendants, la courbe est située, au voisinage de  $t_0$ , d'un seul côté de sa tangente : elle est contenue dans le demi-plan défini par sa tangente et contenant  $f''(t_0)$ . Si les vecteurs  $f'(t_0)$  et  $f''(t_0)$  sont colinéaires et  $k \geq 3$ , et si par exemple  $f'''(t_0)$  est indépendant de  $f'(t_0)$ , on a

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)(1 + \lambda(t - t_0))f'(t_0) + \frac{1}{6}(t - t_0)^3 f'''(t_0) + o((t - t_0)^3)$$

de sorte que la courbe traverse sa tangente, i.e. on est en présence d'un point d'inflexion.

### 7.1 Courbes planes

On considère ici une courbe plane  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  paramétrée par la longueur d'arc  $s$ . On note  $\tau(s) := f'(s)$  le vecteur unitaire tangent à la courbe en  $s$ . Soit  $n(s)$  l'unique vecteur unitaire tel que le couple  $(\tau(s), n(s))$  soit une base orthonormée directe du plan. Le vecteur  $n(s)$  est appelé le vecteur normal à la courbe au point  $f(s)$ .

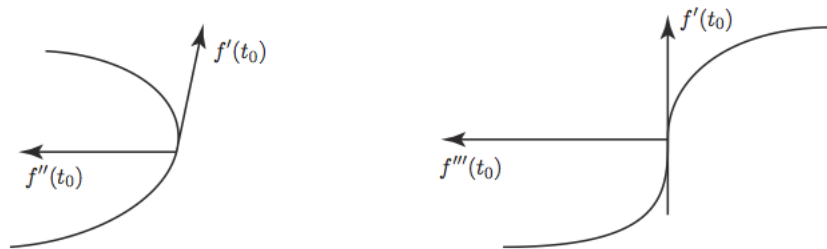


FIGURE 4 – Position d’une courbe par rapport à sa tangente [Aud06].

En dérivant la relation  $\|\tau(s)\|^2 = 1$ , on obtient  $\tau(s) \cdot \tau'(s) = 0$ . Autrement dit, le vecteur  $\tau'(s)$  est orthogonal à  $\tau(s)$  i.e. il est colinéaire à  $n(s)$ . Il existe donc un scalaire  $\kappa(s)$ , appelé courbure algébrique, tel que

$$\tau'(s) = \kappa(s) n(s).$$

Le signe de la courbure algébrique dépend de l’orientation du plan et de celle donnée sur la courbe par l’abscisse curviligne. En dérivant cette fois la relation d’orthogonalité  $\tau(s) \cdot n(s) = 0$ , il vient  $\tau'(s) \cdot n(s) + \tau(s) \cdot n'(s) = 0$  et comme  $\|n(s)\|^2 = 1$ , on voit de même que  $n'(s)$  est colinéaire à  $\tau(s)$  et donc que

$$n'(s) = -\kappa(s) \tau(s).$$

**Interprétation :** la courbure  $\kappa(s)$  est positive quand la courbe est située dans le demi-plan défini par la tangente et contenant  $n(s)$  i.e. quand la courbe “tourne à gauche”. La courbure s’annule lorsque  $\tau'(s) = 0$ , en particulier lorsque la courbe a un point d’inflexion.

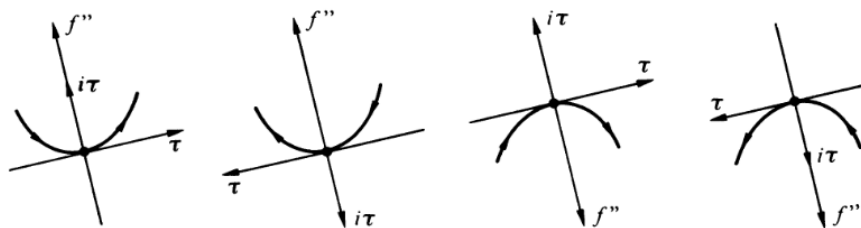


FIGURE 5 – Signe de la courbure algébrique,  $\kappa > 0, \kappa < 0, \kappa < 0, \kappa > 0$  respectivement [BG87].

La valeur absolue  $|\kappa(s)|$  de la courbure algébrique est appelée courbure (“tout court”), on a naturellement

$$|\kappa(s)| = \|\tau'(s)\| = \|f''(s)\|.$$

L’inverse  $\rho(s) = 1/\kappa(s)$  est appelé rayon de courbure et le point  $C(s) := f(s) + \rho(s)n(s)$  est appelé centre de courbure. Le cercle de centre  $C(s)$  est de rayon  $|\rho(s)|$  est appelé cercle osculateur de la courbe en  $f(s)$ .

**Proposition 11** (Développée, proposition VIII.3.1 p. 301 de [Aud06]). *Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  un paramétrage de classe  $C^3$  d’une courbe plane. On suppose que la courbure ne s’annule pas sur  $I$ . On désigne  $D_t$  la droite normale à la courbe au point de paramètre  $f(t)$ . Alors l’enveloppe de la famille des droites  $(D_t)_{t \in I}$  est l’ensemble des centres de courbure.*

On renvoie au chapitre VIII de [Aud06] pour de nombreux exercices sur les courbes et les notions d’enveloppe et développée. Le théorème fondamental suivant affirme qu’une courbe plane est essentiellement caractérisée par sa courbure.

**Théorème 15** (Théorème 8.5.7 p 333 de [BG87]). Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant zéro,  $c$  une fonction continue de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $a, b$  deux points du plan avec  $\|b\| = 1$ . Alors, il existe un unique arc géométrique  $\Gamma$  du plan ayant pour paramétrisation  $(I, f)$  tel que  $f(0) = a$ ,  $f'(0) = b$ ,  $\|f'(s)\| = 1$  et  $\kappa(s) = c(s)$  pour tout  $s \in I$ . Autrement dit, une courbe plane est déterminée, à déplacement près, par sa courbure algébrique.

*Démonstration.* Soit  $(I, f)$  une solution,  $\tau := f' \in C^1(I, \mathbb{S}^1)$  et  $\bar{\tau} \in C^1(I, \mathbb{R})$  un relèvement. On doit avoir  $d\bar{\tau}/ds = c$  autrement dit

$$\bar{\tau}(s) = \tau(0) + \int_0^s c(u)du = b + \int_0^s c(u)du.$$

Ceci définit  $\bar{\tau}$  de façon unique, puis  $\tau$  par projection et enfin  $f$  par intégration. □

**Exemple 2** (Exemple 2.2.8 p. 42 de [Pre10]). La courbe  $\gamma$  paramétrée par la longueur d'arc, passant par l'origine et de vecteur dérivée  $(1, 0)$  en zéro, et dont la courbure algébrique est prescrite, égale à  $c(s) = s$ , est donnée par

$$\gamma(s) = \left( \int_0^s \cos\left(\frac{u^2}{2}\right) du, \int_0^s \sin\left(\frac{u^2}{2}\right) du \right).$$

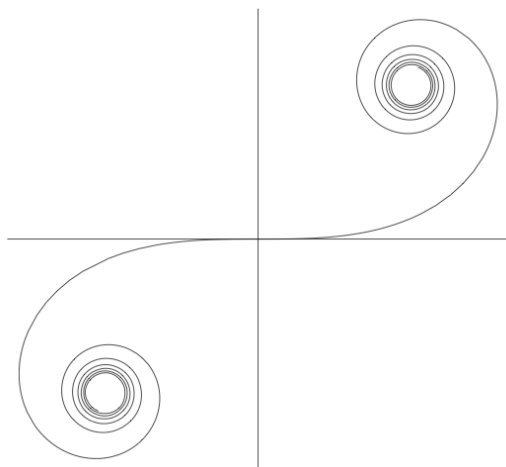


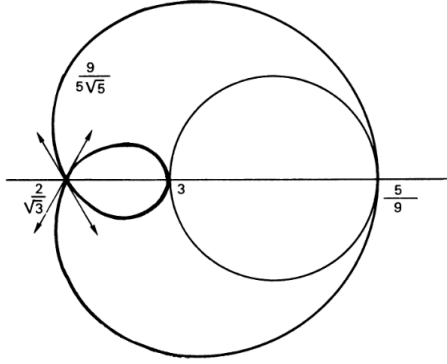
FIGURE 6 – Courbe plane de courbure algébrique  $\kappa(s) = s$  [Pre10].

Lorsqu'une courbe n'est pas paramétrée par la longueur d'arc, mais par une paramétrisation "quelconque" disons  $(I, g)$ , alors la courbure au point  $g(t) = (x(t), y(t))$  s'exprime sous la forme

$$|\kappa(t)| = \frac{\|g'(t) \wedge g''(t)\|}{\|g'(t)\|^3} = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{|x'(t)^2 + y'(t)^2|^{3/2}}.$$

**Exercice 20** (exercice 8.4.14.1 p. 329 de [BG87]). Dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , soit  $\Gamma$  le cercle de centre  $a \in \mathbb{R}^2$  et de rayon  $r$ . Montrer que sa courbure est constante égale à  $1/r$ .

**Exercice 21** (exercice 8.4.14.2 p. 329 de [BG87]).



Soit  $\Gamma$  une courbe du plan paramétrée par  $g(t) = r(t)e^{it}$ .  
Montrer que la courbure au point  $g(t)$  est alors donnée par

$$|\kappa(t)| = \frac{|r(t)^2 + 2r'(t) - 2r(t)r''(t)|}{(r(t)^2 + r'(t)^2)^{3/2}}.$$

Expliciter cette courbure lorsque la courbe  $\Gamma$  est le limaçon de Pascal qui correspond au choix  $r(t) = 1 + 2\cos(t)$ .

## 7.2 Courbes dans l'espace

On considère maintenant une courbe  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  toujours paramétrée par la longueur d'arc  $s$ , de classe  $C^k$  avec  $k \geq 3$ . Comme plus haut, on note  $\tau(s) := f'(s)$  le vecteur unitaire tangent à la courbe en  $s$ . On suppose que la courbe est birégulière, c'est-à-dire que  $\tau$  et  $\tau'$  ne s'annulent pas sur  $I$ . On désigne par  $n(s)$  le vecteur unitaire normal principal et par  $\beta(s)$  le vecteur binormal

$$n(s) := \frac{\tau'(s)}{\|\tau'(s)\|} = \frac{f''(s)}{\|f''(s)\|}, \quad \beta(s) := \tau(s) \wedge n(s).$$

Comme dans le cas plan, en dérivant les relations  $\|\beta(s)\|^2 = 1$  et  $\beta(s) \cdot \tau(s) = 0$ , on obtient que  $\beta(s)$  est colinéaire à  $n(s)$ , de sorte qu'il existe un scalaire  $t(s)$ , appelé torsion, tel que

$$\beta'(s) = t(s)n(s).$$

On obtient finalement, en dérivant les relations  $\|n(s)\|^2 = 1$  et  $n(s) \cdot \tau(s) = n(s) \cdot \beta(s) = 0$  que

$$n'(s) \cdot n(s) = 0, \quad n'(s) \cdot \tau(s) = -n(s) \cdot \tau'(s) = -\kappa(s), \quad n'(s) \cdot \beta(s) = -n(s) \cdot \beta'(s) = -t(s).$$

Ce sont les formules de Frenet et le trièdre  $(\tau(s), n(s), \beta(s))$  est appelé le trièdre de Frenet au point  $f(s)$  de la courbe.

**Interprétation :** par définition,  $\beta(s)$  est orthogonal au plan osculateur  $\text{vect}(\tau(s), n(s))$ . Ainsi  $\beta'(s)$  indique combien tourne ce plan osculateur en fonction de l'abscisse curviligne. La torsion mesure donc la défaut de planéité de la courbe. En particulier, elle est nulle si la courbe est plane. Réciproquement, si la torsion est nulle le vecteur  $\beta(s) = \tau(s) \wedge n(s)$  est constant i.e.  $\tau(s)$  est perpendiculaire à un vecteur constant et la courbe est plane.

Lorsqu'une courbe n'est pas paramétrée par la longueur d'arc, mais par une paramétrisation "quelconque" disons  $(I, g)$ , alors la torsion au point  $g(u)$  s'exprime sous la forme

$$t(u) = \frac{(g'(u), g''(u), g'''(u))}{\|g'(u) \wedge g''(u)\|^2},$$

où  $(x_1, x_2, x_3)$  désigne le produit mixte  $\sqrt{\det(x_i \cdot x_j)}$ .

**Exercice 22** (Exemple 8.6.11.1 p. 337 de [BG87], exercice VIII.20 de [Aud06]). On considère l'hélice circulaire  $\Gamma(a, k)$  paramétrée par  $g(u) = (a \cos(u), a \sin(u), ku)$ . Montrer que la courbure et la torsion sont constantes données par

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + k^2}, \quad t = -\frac{k}{a^2 + k^2}.$$



Comme dans le cas plan, on montre que les courbes suffisamment régulières de l'espace euclidien de dimension 3 sont essentiellement caractérisées par leur courbure et leur torsion.

**Théorème 16** (Théorème 8.6.13 p 339 de [BG87]). *Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant zéro,  $c$  une fonction  $C^1$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $d$  une fonction continue de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et  $u, v, w$  trois points de l'espace avec  $\|v\| = \|w\| = 1$ . Alors, il existe un unique arc géométrique  $\Gamma$  de l'espace ayant pour paramétrisation  $(I, f)$  tel que  $f(0) = u$ ,  $f'(0) = v$ ,  $f''(0)/\|f''(0)\| = w$ ,  $\|f'(s)\| = 1$ ,  $\kappa(s) = c(s)$  et  $t(s) = d(s)$  pour tout  $s \in I$ .*

**Remarque 7.** *Comme on peut s'en douter, les théorèmes 1 et 2 admettent une généralisation naturelle pour les courbes suffisamment régulières à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Moralement, il existe une unique courbe paramétrée par la longueur d'arc dont les "courbures" sont prescrites. On pourra par exemple consulter la très belle leçon 2 et le théorème 1 p. 39 de [Pos90].*

## 8 Courbes : propriétés globales

On s'intéresse maintenant aux propriétés globales des courbes tracées dans l'espace euclidien. Commençons par énoncer le résultat fondamental suivant

**Théorème 17** (Classification des variétés de dimension 1). *Soit  $M$  une variété connexe de dimension 1. Alors  $M$  est difféomorphe à  $\mathbb{S}^1$  si elle est compacte, à  $\mathbb{R}$  si elle n'est pas compacte*

Selon les références, la preuve du théorème peut-être plus ou moins longue et plus ou moins délicate. Il faut en être conscient avant d'en faire ou non un développement. De bonnes références sont le théorème 55 p. 114 de [Laf96] ou encore le Théorème 3.4.1 p. 127 de [BG87].

### 8.1 Autour du théorème de Jordan

Parmi les propriétés globales de courbes planes, la plus fondamentale est sans doute le théorème de Jordan. On l'énonce ici pour une courbe de classe  $C^2$  mais le résultat est vrai si on suppose seulement que la courbe est continue.

**Théorème 18** (Théorème de Jordan, Théorème 9.2.1 p. 357 de [BG87]). *Soit  $C$  une courbe fermée simple de classe  $C^2$  du plan. Alors son complémentaire  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  a exactement deux composantes connexes,  $C_{int}$  et  $C_{ext}$ , telles que  $\overline{C}_{int}$  et  $\overline{C}_{ext}$  sont de frontière commune*

$$\partial \overline{C}_{int} = \partial \overline{C}_{ext} = C.$$

*Les deux composantes se distinguent de la façon suivante :  $\overline{C}_{int}$  est compacte,  $\overline{C}_{ext}$  est non bornée.*

**Remarque 8.** *Il existe de nombreuses approches pour la démonstration du théorème de Jordan, par exemple via le théorème du point fixe de Brouwer, via approximation polygonale etc. Ces preuves restent le plus souvent assez délicates de sorte qu'il est déconseillé de les envisager comme développement.*

**Exercice 23** (Les trois maisons, non planarité de  $K_{3,3}$ ). *Dans un hameau se trouvent trois maisons que l'on veut raccorder aux trois réseaux d'eau, de gaz et d'électricité. Montrer que ceci n'est pas possible sans superposition d'au moins deux conduites.*

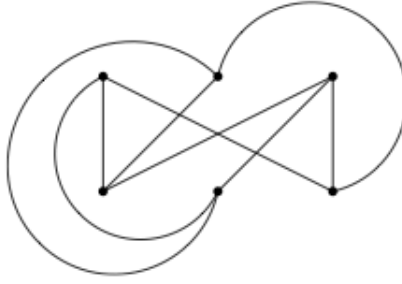


FIGURE 7 – Le graphe  $K_{3,3}$  correspondant au problème des trois maisons.

Le théorème de Jordan permet de montrer que le graphe  $K_{3,3}$  n'est pas planaire. Une preuve alternative serait d'utiliser la formule d'Euler. Grâce à cette dernière, on peut en effet montrer que les graphes  $K_{3,3}$  et  $K_5$  ne sont pas planaires. Il est facile d'en déduire que tout graphe qui contiendrait une subdivision de l'un des ces deux graphes comme sous-graphe n'est pas non plus planaire. Le théorème de Kuratowski affirme que la réciproque est vraie. On pourra en trouver une preuve p. 159 de [BFH12].

**Théorème 19** (Kuratowski, 1930). *Un graphe est planaire si et seulement si il ne contient pas de subdivision de  $K_{3,3}$  ou  $K_5$ .*

## 8.2 Isopérimétrie

L'inégalité isopérimétrique est un grand classique de l'agrégation. Les preuves les plus classiques utilisent l'analyse de Fourier, la formule de Stokes, etc. Attention d'être bien au clair avec tous les ingrédients des démonstrations si vous choisissez l'inégalité comme développement.

**Théorème 20** (Inégalité isopérimétrique, théorème 9.3.1 p. 363 de [BG87], théorème VI.3 p.103 de [QZ13]). *Pour toute courbe fermée simple  $C$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , du plan euclidien, on a*

$$\text{long}(C) \geq 4\pi \text{aire}(C_{\text{int}}),$$

*avec égalité si et seulement si la courbe  $C$  est un cercle.*

**Exercice 24** (Exercice p. de [Pre10]). *En appliquant l'inégalité isopérimétrique à l'ellipse d'équation*

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1,$$

*établir l'inégalité*

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{p^2 \cos(t)^2 + q^2 \sin(t)^2} dt \geq 2\pi \sqrt{pq}.$$

*Quand a-t-on égalité ?*

## 8.3 Nombre de sommets d'une courbe plane

On appelle sommet d'une courbe plane paramétrée  $(I, f)$  tout point  $f(t_0)$  correspondant à un point critique de la courbure algébrique, c'est-à-dire

$$\left. \frac{d\kappa(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = 0.$$

On vérifie aisément que cette définition ne dépend pas du paramétrage de la courbe.

**Exemple 3** (Exemple 3.3.2 p 63 de [Pre10]). *Dans le plan, on considère l'ellipse paramétrée par  $f(t) = (p \cos(t), q \sin(t))$ . Sa courbure algébrique est donnée par*

$$\kappa(t) = \frac{pq}{(p^2 \sin(t)^2 + q^2 \cos(t)^2)^{3/2}},$$

de sorte que

$$\frac{d\kappa(t)}{dt} = \frac{3pq(q^2 - p^2) \sin(t) \cos(t)}{(p^2 \sin(t)^2 + q^2 \cos(t)^2)^{5/2}}.$$

La dérivée s'annule donc aux points tels que  $t = 0, \pi/2, \pi$  et  $3\pi/2$ , i.e. l'ellipse a quatre sommets.

Le théorème suivant montre qu'une courbe fermée simple convexe dans le plan a toujours au moins 4 sommets. L'hypothèse de convexité n'est pas nécessaire mais la preuve est alors bien plus délicate. Le cas où la courbure est partout strictement positive est par exemple traité dans [FGN12] p. 335.

**Théorème 21** (des quatre sommets, théorème 3.3.3 p 63 de [Pre10]). *Soit  $C$  une courbe fermée simple convexe, alors  $C$  possède au moins quatre sommets.*

**Exercice 25** (Exercice 3.3.2 p. 65 de [Pre10]). *Déterminer le nombre de sommets du limaçon de l'exercice 2 paramétré par  $f(t) = (1 + 2 \cos(t))(\cos(t), \sin(t))$ .*

## 8.4 Umlaufsatz

Cette section est consacrée à quelques résultats concernant le nombre d'enroulement des courbes fermées planes. Une excellente référence est le chapitre 9 de [BG87]. Soit  $C$  une courbe orientée fermée du plan euclidien orienté. Si la courbe  $C$  est représentée par  $(\mathbb{S}^1, f)$ , alors l'application tangente unitaire

$$\tau_f : t \mapsto \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$$

est une application continue de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{S}^1$ . Elle possède donc un degré que l'on note  $\deg \tau_f$ . On vérifie que si  $(\mathbb{S}^1, g)$  est une autre représentation, alors  $\deg \tau_f = \deg \tau_g$ .

**Définition 10.** *Le degré de l'application linéaire tangente  $\tau_f$ , qui ne dépend pas de la représentation  $(\mathbb{S}^1, f)$  de la courbe  $C$ , est appelé enroulement de la courbe et noté  $W(C)$ .*

**Définition 11.** *Deux courbes fermées  $C$  et  $D$  du plan, de classe  $C^1$ , sont dites homotopes s'il existe une homotopie  $F \in C([0, 1] \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$  telle que pour tout  $t \in [0, 1]$  l'application  $F(t, \cdot) : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  soit une immersion de classe  $C^1$  et  $F(0, \cdot) = C, F(1, \cdot) = D$ .*

**Proposition 12.** *Si  $C$  et  $D$ , deux courbes fermées orientées du plan, sont homotopes alors elles ont même nombre d'enroulements  $W(C) = W(D)$ .*

**Théorème 22** (Whitney-Grauert, théorème 9.4.8 p.368 de [BG87]). *Soient  $C$  et  $D$  deux courbes fermées orientées du plan telles que  $W(C) = W(D)$ . Alors  $C$  et  $D$  sont homotopes.*

**Théorème 23** (Gauss-Bonnet unidimensionnel). Soit  $C$  une courbe fermée et  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  une paramétrisation, de période  $\ell$  égale à la longueur de la courbe  $C$ , alors on a

$$\int_0^\ell \kappa(s) ds = 2\pi W(C).$$

En particulier, on obtient que le membre de gauche, appelé courbure totale, est invariant par homotopie.

**Théorème 24.** Soit  $C$  une courbe fermée simple. On a alors  $W(C) = \pm 1$ . En particulier, si la courbe  $C$  est orientée, on a  $W(C) = 1$ .

**Corollaire 1.** Si  $C$  une courbe fermée simple orientée, sa courbure totale est égale à  $2\pi$ .

**Ce dont on aurait aussi pu parler :**

Il y a beaucoup à dire sur les courbes tracées dans l'espace euclidien et ce qui précède n'en est qu'un bref aperçu. Voici quelques idées sous forme de liste non exhaustive.

1. Les courbes classiques qui apparaissent en mécanique ou en optique.
2. Les courbes de Bézier et leur propriétés d'interpolation.
3. Les courbes qui remplissent le plan, par exemple la courbe de Peano.
4. Les courbes fractales et leur dimension, par exemple le flocon de Von Koch.
5. Le mouvement brownien (vu comme limite d'échelle de marches aléatoires) qui permet de répondre à la question, comment choisir une fonction  $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  au hasard ?
6. Le théorème de Riemann sur les applications conformes en lien avec le théorème de Jordan.
7. Les évolutions de Loewner ou comment coder une courbe complexe par une fonction réelle.

## 9 Propriétés locales des surfaces

Nous rappelons ici quelques résultats concernant les surfaces de l'espace euclidien de dimension trois. Celles-ci seront vues tour à tour comme surfaces paramétrées, solutions d'équations etc. Il est important de savoir passer d'une représentation à une autre, confier le premier complément de cours sur les sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ , les immersions, submersions... On pourra par exemple consulter le bestiaire du début du chapitre 10 de [BG87] qui contient de belles figures. Comme dans le cas des courbes, on s'intéresse tout d'abord aux propriétés locales des surfaces. On commence par rappeler la notion de différentiabilité pour les applications définies sur les surfaces.

### 9.1 Différentiabilité sur une surface

Soit  $h$  une application définie sur une surface  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  à valeur dans  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $h$  est différentiable si pour tout paramétrage  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^3$  l'application  $h \circ f$  est différentiable (vue comme brave fonction entre espace euclidien). De même que l'application  $h \circ f$  a une différentielle en tout point de  $U$ , il y a une application linéaire associée à  $h$ , appelée son application linéaire tangente, en tout point de  $\Sigma$ . Pour tout  $X \in T_p \Sigma$ , il existe un unique vecteur de  $\xi \in \mathbb{R}^2$  tel que  $D_{(u,v)} f(\xi) = X$ . On vérifie alors aisément que le vecteur  $D_{(u,v)}(h \circ f)(\xi)$  ne dépend pas du paramétrage  $f$ .

**Définition 12** (Application tangente). On appelle application linéaire tangente de  $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$  au point  $p \in \Sigma$ , l'application

$$T_p h : \begin{array}{l} T_p \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n \\ X \mapsto T_p h(X) = D_{(u,v)}(h \circ f)(\xi), \end{array}$$

où  $\xi$  est l'unique vecteur de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $D_{(u,v)}f(\xi) = X$ .

## 9.2 Position par rapport à l'espace tangent

Dans ce paragraphe, on explicite la position d'une surface par rapport à son plan tangent lorsque celle-ci est décrite par une équation cartésienne. Soit une surface  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  et un point  $p_0 \in \Sigma$ . En choisissant convenablement un système de coordonnées local, on peut supposer qu'au voisinage de  $p_0$ , la surface est décrite par une équation cartésienne  $z = f(x, y)$  avec  $f(0, 0) = 0$ . Auquel cas, la formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de  $p_0$  s'écrit

$$f(x, y) = px + qy + \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + o(x^2 + y^2),$$

où l'on a posé

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0), \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0).$$

La position de la surface par rapport à l'espace tangent est déterminée par la forme quadratique

$$Q(x, y) = rx^2 + 2sxy + ty^2.$$

- Si  $Q$  est définie, i.e. si  $s^2 - rt < 0$ , alors la fonction  $f(x, y) - px - qy$  admet un extremum strict en zéro et la surface reste d'un côté de l'espace tangent. Le point  $p_0$  est alors dit elliptique.
- Si  $Q$  est non dégénérée mais change de signe, i.e.  $s^2 - rt > 0$  il y a des points de la surface arbitrairement proches de  $p_0$  de part et d'autre du plan tangent. Le point  $p_0$  est dit hyperbolique.
- si  $Q$  est dégénérée mais non nulle, i.e.  $s^2 - rt = 0$  mais  $r, s, t$  sont non tous nuls, on peut supposer que  $Q(x, y) = \alpha x^2$ . Son graphe est un cylindre parabolique. La surface contient des points arbitrairement proche de  $p_0$  du même côté du plan tangent que ce graphe, mais elle peut très bien en contenir également de l'autre côté. On dit que  $p_0$  est parabolique.
- Si  $Q$  est nulle, il peut se passer à peu près n'importe quoi. Le point  $p_0$  est dit planaire.



FIGURE 8 – Position par rapport au tangent dans les cas elliptique et hyperbolique [Aud06].

**Exercice 26** (Exercice IX.11 p. 345 de [Aud06]). Pour chacune des équations suivantes, représenter la surface et étudier sa position par rapport à son plan tangent en l'origine :

$$z = x^2, \quad z = x^2 + y^3, \quad z = x^3, \quad z = x^4, \quad z = x^3 - 3xy^2.$$

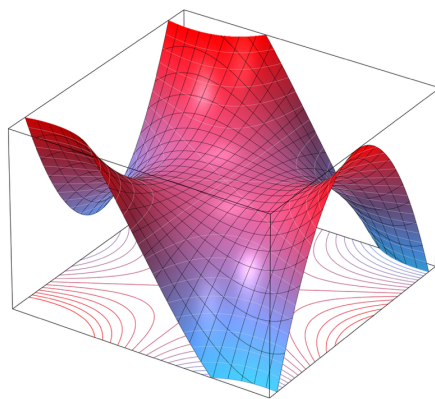


FIGURE 9 – Surface dite de la “selle de singe” d’équation  $z = x^3 - 3xy^2$ .

## 10 Les différentes courbures sur une surface

Nous nous intéressons à présent aux propriétés métriques des surfaces euclidiennes et rappelons les notions de courbures : courbures principales, courbure de Gauss, courbure moyenne etc.

### 10.1 Courbures principales d’une surface

Soient  $\Sigma$  une surface de  $\mathbb{R}^3$ ,  $p$  un point de  $\Sigma$  et  $n(p)$  un vecteur directeur de la normale à  $T_p\Sigma$  au point  $p$ . Si  $X \in T_p\Sigma$  est un vecteur unitaire, on note alors  $P_X$  le plan engendré par  $X$  et  $n(p)$ . L’intersection de  $P_X$  et  $\Sigma$  est une courbe plane qui, comme nous l’avons vu dans la leçon précédente, possède une courbure algébrique au point  $p$ , notée ici  $K_X(p)$ . Remarquons que  $K_X(p) = K_{-X}(p)$ .

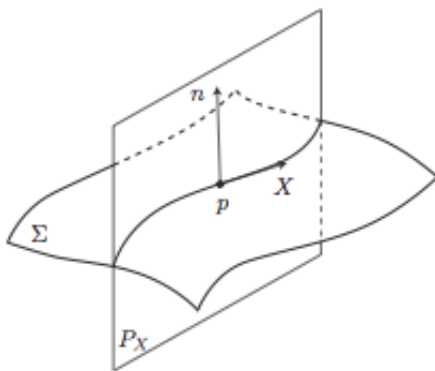


FIGURE 10 – Courbe obtenue comme intersection d’une surface et d’un plan normal [Aud06].

**Exercice 27.** Quelles sont les courbures  $K_X(p)$  lorsque  $X$  décrit l’espace tangent unitaire au pôle nord de la sphère euclidienne  $\mathbb{S}^2 \in \mathbb{R}^3$  ? Même question pour la base de l’hyperboloïde à une nappe d’équation  $\{z > 0\} \cap \{x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ .

**Théorème 25** (Euler, théorème IX.3.1 p. 332 de [Aud06]). Si tous les  $K_X(p)$  ne sont pas égaux lorsque  $X$  varie, il existe une unique direction, représentée par un vecteur unitaire  $X_1 \in T_p\Sigma$ , pour

laquelle  $K_X(p)$  est minimale. De même, il existe une unique direction, représentée par un vecteur unitaire  $X_2 \in T_p\Sigma$ , pour laquelle  $K_X(p)$  est maximale. Si  $X$  fait un angle  $\theta$  avec  $X_1$ , on a alors

$$K_X(p) = K_{X_1}(p) \cos(\theta)^2 + K_{X_2}(p) \sin(\theta)^2.$$

**Définition 13.** Si  $p \in \Sigma$ , les courbures  $K_{X_1}(p)$  et  $K_{X_2}(p)$  sont appelées courbures principales au point  $p$  et les directions sont appelées directions de courbure principales.

**Définition 14.** On appelle courbure de Gauss au point  $p$  et on note  $K(p)$  le produit des courbures principales  $K(p) := K_{X_1}(p)K_{X_2}(p)$ .

**Définition 15.** On appelle courbure moyenne au point de  $p$  et on note  $K_m(p)$  la moyenne arithmétique des courbures principales :

$$K_m(p) := \frac{K_{X_1}(p) + K_{X_2}(p)}{2}.$$

## 10.2 Les formes fondamentales d'une surface

Nous rappelons les notions de première et seconde formes fondamentales et leur liens avec les courbures introduites plus haut.

### 10.2.1 Première forme fondamentale

Les surfaces  $\Sigma$  considérées ici sont des sous-variétés de dimension deux de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ . En particulier, en tout point  $p \in \Sigma$ , l'espace tangent  $T_p\Sigma$  peut être vu comme un plan de  $\mathbb{R}^3$  dont il hérite la structure métrique. La forme quadratique euclidienne, restreinte à  $T_p\Sigma$  s'appelle la première fondamentale en  $p \in \Sigma$ , on la note  $I_p$ . Autrement dit,

$$I_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle, \quad \forall X, Y \in T_p\Sigma,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire euclidien. Si la surface  $\Sigma$  est représentée localement par une immersion  $(u, v) \mapsto \phi(u, v)$ , alors la première forme fondamentale est donnée par

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

où

$$E = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \right\|^2, \quad F = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\rangle, \quad G = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\|^2.$$

**Exercice 28** (Exemples p. 419 de [BG87]). Montrer que si la surface  $\Sigma$  est donnée par une équation cartésienne du type  $z = f(x, y)$ , alors la première forme fondamentale est donnée par

$$ds^2 = (1 + p^2)dx^2 + 2pqdx dy + (1 + q^2)dy^2,$$

où l'on a posé

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Dans le cas où  $\Sigma$  est une surface de révolution i.e.  $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ , montrer que la première forme fondamentale est donnée en coordonnées polaires par  $ds^2 = (1 + f'^2)dr^2 + r^2d\theta^2$ .

## 10.2.2 Seconde forme fondamentale

Soit  $\Sigma$  une surface paramétrée par  $(U, f)$  et  $p \in \Sigma$ . On appelle vecteur normal au point  $p$ , noté  $n(p)$  le vecteur unitaire

$$n(p) := \frac{\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \right\|}.$$

On obtient ainsi une application  $n : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ .

**Définition 16.** L'application linéaire tangente  $T_p n : T_p \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  est appelée application de Gauss.

Comme  $\|n(p)\| = 1$ , on a  $T_p n(X) \cdot n(p) = 0$  pour tout vecteur tangent  $X \in T_p \Sigma$ . Donc  $T_p n$  est à valeurs dans l'espace tangent à la sphère. Les espaces tangents  $T_p \Sigma$  et  $T_{n(p)} \mathbb{S}^2$  sont les mêmes (plan orthogonal à  $n(p)$ ), aussi l'application linéaire tangente peut être vue comme un endomorphisme de  $T_p \Sigma$ . La courbure de Gauss  $K(p)$  n'est autre que son déterminant. L'interprétation de la courbure de Gauss est donc la suivante : si  $(v_p, w_p)$  est une base orthodnormée de  $T_p \Sigma$ , l'application linéaire tangente envoie  $(v_p, w_p)$  sur un couple de vecteur  $(v'_p, w'_p)$  de  $T_{n(p)} \mathbb{S}^2$ , la courbure de Gauss est l'aire orientée du parallélogramme associé à  $(v'_p, w'_p)$  (voir figure ci-après).

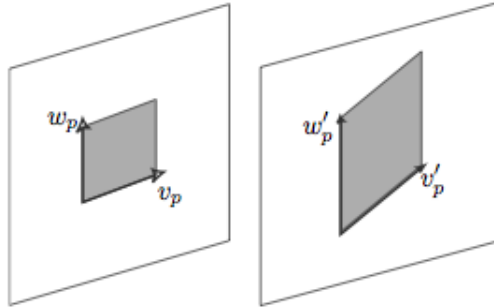


FIGURE 11 – Interprétation géométrique de la courbure de Gauss [Aud06].

**Définition 17.** On appelle deuxième forme fondamentale au point  $p \in \Sigma$ , et on note  $\Pi_p$ , la forme bilinéaire (symétrique)

$$\Pi_p(X, Y) := -\langle T_p n(X), Y \rangle.$$

Si la surface  $\Sigma$  est représentée localement par une immersion  $(u, v) \mapsto \phi(u, v)$ , alors la première forme fondamentale est donnée par

$$ds^2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2,$$

où

$$L = \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}, n \right\rangle, \quad M = \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}, n \right\rangle, \quad N = \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}, n \right\rangle.$$

**Proposition 13.** Soit  $\gamma$  une courbe paramétrée par la longueur d'arc et tracée sur la surface  $\Sigma$ . Soit  $X = \gamma'(0) \in T_p \Sigma$  son vecteur tangent en  $p$ . Alors

$$\Pi_p(X, X) = \langle \gamma''(0), n(p) \rangle.$$



En particulier, par définition de la courbure d'une courbe plane,  $\Pi_p(X, X)$  est la courbure  $K_X$  de la courbe découpée par le plan engendré par  $n(p)$  et  $X$ , i.e. la courbure introduite dans la section 2.1. Il existe une base orthonormée  $(X_1, X_2)$  du tangent  $T_p\Sigma$  dans laquelle la seconde forme fondamentale est diagonalisée, auquel cas on a pour  $i = 1, 2$  :

$$\Pi_p(X_i, X_i) = K_{X_i}.$$

Comme ces vecteurs forment une base orthogonale, on a alors

$$\Pi_p(\cos(\theta)X_1 + \sin(\theta)X_2) = K_{X_1} \cos(\theta)^2 + K_{X_2} \sin(\theta)^2.$$

Remarquons que si les courbures  $K_{X_1}$  et  $K_{X_2}$  sont distinctes, i.e. si  $\Pi_p$  n'est pas proportionnelle au produit scalaire euclidien, elles sont effectivement les extrema de  $X \mapsto K_X$ . Toujours dans le cas où la surface  $\Sigma$  est représentée localement par une immersion  $(u, v) \mapsto \phi(u, v)$ , en terme de la première et seconde forme fondamentale, les courbures gaussienne et moyenne sont données par

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad K_m = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)}.$$

Les courbures principales sont quant à elles les racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} L - \kappa E & M - \kappa F \\ M - \kappa F & N - \kappa G \end{vmatrix} = 0$$

**Exercice 29** (Appendice IX.4 p. 341 de [Aud06]). Soit  $\Sigma$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  solution d'une équation :

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, F(x_1, x_2, x_3) = 0\}.$$

Montrer que la seconde forme fondamentale s'écrit alors

$$\Pi_p(X, Y) = -\frac{1}{\|\nabla_p F\|} \sum_{i,j=1}^3 \partial_i \partial_j F(p) X_i X_j.$$

**Exercice 30** (Exercice 8.1.1 p.185 de [Pre10]). Soit  $\Sigma$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  donnée par une équation cartésienne  $z = f(x, y)$ . Montrer que les courbures de Gauss et moyennes sont données par

$$K(x, y) = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}, \quad K_m(x, y) = \frac{(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}}{2(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}$$

**Exercice 31** (Exercices 8.1.2 et 8.2.1 de [Pre10]). Calculer les courbures principales, moyenne et gaussienne de l'hélicoïde paramétrée par  $(u, v) \mapsto (v \cos(u), v \sin(u), \lambda u)$ .

**Exercice 32** (Exercice IX.17 p. 346 de [Aud06]). On considère une courbe plane paramétrée par la longueur d'arc et on la fait tourner autour d'une droite de son plan qu'elle ne rencontre pas, obtenant ainsi une surface paramétrée par

$$(s, \theta) \mapsto (g(s) \cos(\theta), g(s) \sin(\theta), h(s)), \quad \text{avec } g'^2 + h'^2 = 1.$$

Montrer que la courbure de Gauss au point de paramètre  $(s, \theta)$  vaut alors

$$K(s, \theta) = -\frac{g''(s)}{g(s)}.$$

On suppose maintenant que la courbure est constante.

1. Montrer que si  $K$  est nulle, la surface est un plan, un cylindre ou un cône.
2. Si  $K > 0$ , écrire la solution générale  $(g(s), h(s))$  et vérifier que les sphères sont des solutions.
3. Si  $K < 0$ , écrire la solution générale  $(g(s), h(s))$ . Dessiner la surface obtenue pour

$$g(s) = e^s, \quad h(s) = \pm \int_0^s \sqrt{1 - e^{2t}} dt.$$

**Ce dont on aurait aussi pu parler :**

La théorie des surfaces de l'espace euclidien est infiniment riche, nous n'avons fait que l'effleurer. En particulier nous n'avons pas abordé les propriétés globales des surfaces, par exemple la classification des surfaces connexes compactes par leur genre, le théorème de Gauss-Bonnet etc. On aurait aussi pu évoquer les géodésiques des surfaces, les applications conformes entre les surfaces, la notion de transport parallèle etc.

## 11 Zéros de polynômes aléatoires

La référence pour cette partie est l'article original d'Edelman et Kostlan [EK95] ou encore les pages p.321 à 324 de [CGL16], disponible à la bibliothèque.

### 11.1 Courbes et aires balayées sur la sphère euclidienne

On considère la sphère euclidienne  $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ . Si  $x \in \mathbb{S}^d$ , on désigne par  $x^\perp$  le grand cercle obtenu comme intersection de la sphère avec l'hyperplan vectoriel orthogonal à  $x$ . Si  $\gamma = (\gamma_t)_{t \in I}$  est une courbe tracée sur  $\mathbb{S}^d$  on désigne par  $\gamma^\perp$  l'ensemble des grands cercles orthogonaux aux points de la courbe :

$$\gamma^\perp := \bigcup_{t \in I} \gamma_t^\perp.$$

Peut-on relier l'aire  $\mathcal{A}(\gamma^\perp)$  de l'ensemble  $\gamma^\perp$  sur la sphère à la longueur  $\ell(\gamma)$  de la courbe  $\gamma$  ?

**Définition 18.** *Étant données  $x \in \mathbb{S}^d$  et  $\gamma = (\gamma_t)_{t \in I}$  une courbe lisse sur  $\mathbb{S}^d$ , on appelle multiplicité de  $x$  par rapport à  $\gamma$  le nombre*

$$m(x, \gamma) := \#\{t, x \in \gamma_t^\perp\}.$$

*L'aire balayée par  $\gamma$  comptée avec multiplicité est alors*

$$\mathcal{A}(\gamma^\perp) = \int_{\mathbb{S}^d} m(x, \gamma) \sigma(dx),$$

où  $\sigma$  est la mesure de volume normalisée sur la sphère  $\mathbb{S}^d$ .

La réponse à la question ci-dessus est donnée par la proposition suivante :

**Proposition 14.** *Si  $\gamma$  est une courbe rectifiable, alors*

$$\mathcal{A}(\gamma^\perp) = \frac{\ell(\gamma)}{\pi}.$$

## 11.2 Le théorème d'Edelman et Kostlan

Considérons la courbe  $v = (v_t)_{t \in \mathbb{R}}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{d+1}$  définie par  $v_t = (1, t, t^2, \dots, t^d)$  et soit  $\gamma$  sa projection sur la sphère  $\mathbb{S}^d$ , i.e.  $\gamma_t = v_t / \|v_t\|$ . Soit alors un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  dont les coefficients, supposés non tous nuls, sont représentés par un vecteur  $a = (a_0, \dots, a_d)$

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_d X^d.$$

On a alors l'équivalence

$$P(t) = 0 \iff \frac{a}{\|a\|} \in \gamma_t^\perp.$$

Autrement dit le nombre  $Z(P)$  de racines réelles de  $P$  est donné par la multiplicité de  $\frac{a}{\|a\|}$  par rapport à  $\gamma$

$$Z(P) := \#\{t \in \mathbb{R}, P(t) = 0\} = m\left(\frac{a}{\|a\|}, \gamma\right).$$

Soit maintenant un vecteur aléatoire  $a \in \mathbb{R}^{d+1}$  de sorte que la loi de  $a/\|a\|$  soit la loi uniforme sur la sphère, par exemple un vecteur gaussien centré réduit, alors en moyenne, le nombre de zéros réels du polynôme associé est

$$\mathbb{E}[Z(P)] = \mathbb{E}\left[m\left(\frac{a}{\|a\|}, \gamma\right)\right] = \int_{\mathbb{S}^d} m(x, \gamma) \sigma(dx) = \frac{\ell(\gamma)}{\pi}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer la longueur de  $\gamma$ , c'est-à-dire  $\ell(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} \|\gamma'_t\| dt$ . On peut montrer que

$$\|\gamma'_u\|^2 = \partial_s \partial_t \log(v_s \cdot v_t)|_{s=t=u},$$

de sorte que

$$\mathbb{E}[Z(P)] = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\partial_s \partial_t \log\left(\frac{1 - (st)^{d+1}}{1 - st}\right)} \Big|_{s=t=u} du.$$

On obtient ainsi le développement asymptotique

$$\mathbb{E}[Z(P)] = \frac{2}{\pi} \log(d) + cste + \frac{2}{\pi d} + o(1/d).$$

## Références

- [Aud06] Michèle Audin. Géométrie. EDP Sciences, 2006.
- [Ave97] André Avez. Calcul différentiel. Masson, 1997.
- [BFH12] Alain Bretto, Alain Faisant, and François Hennecart. Éléments de théorie des graphes. Springer, 2012.
- [BG87] Marcel Berger and Bernard Gostiaux. Géométrie différentielle : variétés, courbes, surfaces. PUF, 1987.
- [CGL16] É. Charpentier, É Ghys, and A. Lesne. L'héritage scientifique de Poincaré. Belin, 2016.
- [EK95] Alan Edelman and Eric Kostlan. How many zeros of a random polynomial are real? Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 32(1) :1–37, 1995.

- [Fed69] Herbert Federer. Geometric measure theory. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.
- [FGN12] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. Exercices oraux X-ENS, Analyse 4. Cassini, 2012.
- [KP08] Steven G. Krantz and Harold R. Parks. Geometric integration theory. Cornerstones. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2008.
- [Laf96] Jacques Lafontaine. Introduction aux variétés différentiables. EDP Sciences, 1996.
- [MT86] Rached Mneimé and Frédéric Testard. Introduction à théorie des groupes de Lie classiques. Hermann, 1986.
- [Pos90] Mikhail Postnikov. Leçons de géométrie, Variétés différentiables. Mir, 1990.
- [Pre10] Andrew Pressley. Elementary differential geometry. Springer, 2010.
- [QZ13] Hervé Queffélec and Claude Zuily. Éléments d'analyse : agrégation de mathématiques. Dunod, 2013.
- [Rou03] François Rouvière. Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation, 2ème édition. Cassini, 2003.
- [Sch67] Laurent Schwartz. Cours d'analyse, volume 2. Hermann, 1967.