

## FEUILLE DE TRAVAUX PRATIQUES # 9

L'objet de ce TP est de générer une marche aléatoire à boucles effacées sur un graphe, puis d'implémenter l'algorithme de Wilson qui permet d'en déduire un arbre couvrant uniforme. Si besoin, on pourra utiliser les codes disponibles [ici](#).

### 1 Vers la marche aléatoire à boucles effacées

#### 1.1 La marche simple sur un graphe

On considère un graphe connexe  $G = (S, A)$  où  $S$  désigne l'ensemble des sommets et  $A \subset S \times S$  l'ensemble des arêtes (non orientées). À tout sommet  $x \in S$ , on associe son degré (supposé fini)  $\deg(x) := \#V_x$  où  $V_x := \{y \in S, (x, y) \in A\}$  désigne l'ensemble des voisins immédiats de  $x$  dans le graphe. On rappelle que la marche aléatoire simple dans  $G$  issue de  $x_0 \in S$  est la chaîne de Markov homogène  $(X_n)_{n \geq 0}$  telle que  $X_0 = x_0$  presque sûrement et telle que pour tout  $n \geq 0$ , la loi conditionnelle  $\mathcal{L}(X_{n+1} | X_n = x)$  est la loi uniforme sur  $V_x$ . Autrement dit :

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0) = 1, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) = \begin{cases} \frac{1}{\deg(x)} & \text{si } y \in V_x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exercice 1.** Générer une marche aléatoire simple issue de l'origine dans le graphe  $\mathbb{Z}^2$  des points du plan à coordonnées entières. Même question sur une grille  $n \times n$ , c'est-à-dire sur le graphe  $G = \mathbb{Z}^2 \cap [0, n - 1] \times [0, n - 1]$  représenté à gauche dans la figure 2 ci-dessous dans le cas  $n = 4$ .

#### 1.2 La marche aléatoire à boucles effacées

On appelle marche aléatoire à boucles effacées dans  $G$  issue de  $x_0 \in S$ , la trajectoire aléatoire obtenue à partir de la marche aléatoire simple issue de  $x_0$  décrite ci-dessus, en effaçant les éventuelles boucles par ordre chronologique d'apparition. Naturellement, la courbe obtenue après l'effacement des boucles est une courbe simple, sans auto-intersection.

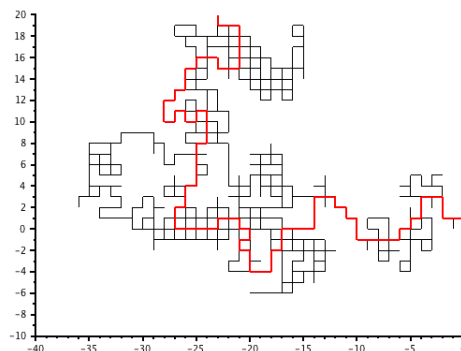


FIGURE 1 – Exemple de trajectoire de marche aléatoire simple dans  $\mathbb{Z}^2$  et de sa version à boucles effacées (en rouge).

L'algorithme qui à partir des coordonnées  $(S_0, S_1, \dots, S_n)$  de la marche simple initiale fourni les coordonnées de son analogue à boucles effacées peut être décrit comme suit :

$$\begin{cases} \text{on initialise } i_0 := \max\{i, S_i = S_0\}, \text{ et tant que } S_{i_j} \neq S_n \\ \text{on pose } i_{j+1} = \max\{i, S_i = S_{i_j}\} + 1. \end{cases}$$

Dès lors, si  $J$  est le premier entier tel que  $S_{i_J} = S_n$ , la marche à boucles effacées est donnée par  $LE(S) := (S_{i_0}, S_{i_1}, \dots, S_{i_J})$ .

**Exercice 2.** Écrire une fonction *Scilab* qui à partir d'une trajectoire de la marche simple sur  $\mathbb{Z}^2$  ou sur la grille  $n \times n$  de l'exercice précédent, génère une trajectoire de la marche à boucle effacées.

## 2 Arbres couvrants

### 2.1 La notion d'arbre couvrant

Étant donné un graphe connexe  $G = (S, A)$ , on appelle arbre couvrant au dessus de  $G$  tout graphe connexe  $T$  dont l'ensemble des sommets coïncide avec  $S$  et qui ne possède pas de cycle. Autrement dit,  $T = (S_T, B_T)$  avec  $S_T = S$  et  $A_T \subset A$  choisi de sorte que le graphe obtenu soit connexe et sans cycle.

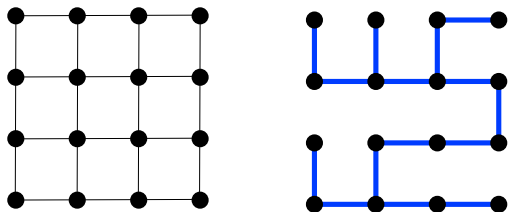


FIGURE 2 – Grille  $4 \times 4$  et un exemple d'arbre couvrant.

Si le graphe d'origine  $G$  est fini, il n'y a naturellement qu'un nombre fini d'arbres couvrants au dessus de  $G$ . Aussi peut-on en choisir un selon la mesure uniforme, on parle alors d'arbre couvrant uniforme au dessus de  $G$ . Dans le cas très simple de la grille  $n \times n$  envisagé précédemment, on montre cependant facilement que le nombre de tels arbres couvrants croît exponentiellement vite avec  $n^2$ , aussi il n'est pas du tout évident de simuler un arbre couvrant uniforme. L'algorithme de Wilson permet précisément d'outrepasser cette difficulté.

### 2.2 L'algorithme de Wilson

L'algorithme de Wilson est un algorithme d'exploration basé sur la notion de marche aléatoire à boucles effacées. On suppose que le graphe connexe  $G = (S, A)$  de départ est fini, et on énumère ces sommets  $S = \{s_0, \dots, s_{n-1}\}$ , l'ordre des sommets n'ayant aucune importance. On construit le futur arbre couvrant par récurrence. On pose ainsi  $T_0 = (\{s_0\}, \emptyset)$ . Ensuite, pour tout  $1 \leq i \leq n-1$ , on lance une marche aléatoire à boucles effacées issue de  $s_i$ , et on s'arrête dès que l'on atteint l'arbre  $T_{i-1}$ . On incorpore alors la trajectoire sans cycle  $\gamma_i$  obtenue dans le nouvel arbre  $T_i = T_{i-1} \cup \gamma_i$ . On vérifie facilement qu'à chaque étape,  $T_i$  est un arbre et par construction  $T_{n-1}$  contient tous les sommets de  $S$ . C'est donc un arbre couvrant de au dessus de  $G$ . On peut montrer que la loi de l'arbre obtenu est uniforme.

**Exercice 3.** Implémenter l'algorithme de Wilson pour générer un arbre couvrant uniforme au dessus de la grille  $n \times n$  comme dans la figure 2.