

## FEUILLE DE TRAVAUX PRATIQUES # 3

### 1 La méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo est une méthode de calcul approché d'intégrales, basée sur la loi des grands nombres. Elle permet ainsi de calculer des valeurs approchées d'intégrales, d'espérances, de probabilités, en utilisant des réalisations i.i.d. d'une loi que l'on sait simuler. Par exemple, si  $f : [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $[0, 1]^d$  et que l'on souhaite évaluer l'intégrale

$$I(f) := \int_{[0,1]^d} f(x)dx,$$

la méthode de Monte-Carlo consiste à se donner  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur  $[0, 1]^d$  et à considérer l'approximation

$$I_n(f) := \frac{1}{n} (f(X_1) + \dots + f(X_n)).$$

En effet, d'après la loi des grands nombres, on sait que  $I_n(f)$  convergence presque sûrement et dans  $\mathbb{L}^1$  vers la limite  $\mathbb{E}[f(X_1)] = I(f)$ . Pour  $n$  grand, la somme  $I_n(f)$  fournit ainsi une bonne approximation de  $I(f)$ .

Comme nous le verrons plus loin, si l'on sait majorer la variance de  $f(X_1)$ , on est de plus en mesure de fournir des intervalles de confiance pour contrôler l'erreur commise dans l'approximation. La vitesse de convergence de cette méthode (de l'ordre de  $\sqrt{n}$ ) est lente par rapport à des méthodes déterministes. Cependant cette vitesse ne dépend pas de la régularité de l'intégrande  $f$  et dépend plus faiblement de la dimension  $d$  que les méthodes déterministes.

Le premier exemple connu d'application de cette méthode remonte au dix-huitième siècle et au fameux problème de l'aiguille de Buffon qui permet un calcul approché de  $\pi$ . Le nom "méthode de Monte-Carlo" est un nom de code qu'a utilisé Ulam alors qu'il développait ces méthodes avec von Neuman, Fermi et Metropolis, dans le laboratoire de Los Alamos, où se préparait la première bombe à hydrogène.

#### Exercice 1 Premiers exemples

À l'aide de la méthode Monte-Carlo, calculer des approximations des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 4\sqrt{1-x^2}dx, \quad \int_{[-1,1]^3} \mathbf{1}_{\{x^2+2y^2+3z^2 \leq 1\}} dx dy dz.$$

#### Exercice 2 Volume de la boule unité

On considère la boule unité  $\mathbb{B}_d$  dans  $\mathbb{R}^d$ , i.e.  $\mathbb{B}_d = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2 \leq 1\}$ .

1. Écrire une fonction qui, en entrée, prend deux entiers  $n$  et  $d \geq 2$  et en sortie, donne une approximation du volume de la boule euclidienne basée sur un  $n$ -échantillon de variables uniformes dans le cube  $[-1, 1]^d$ .
2. Comparer l'écart à la valeur théorique en fonction de  $d$  et  $n$ .

## 2 Performance algorithmique

D'un point de vue pratique, si l'on veut utiliser la méthode Monte-Carlo pour estimer une intégrale/espérance du type  $\mathbb{E}[f(X)]$ , où  $X$  est un vecteur aléatoire dans  $\mathbb{R}^d$  et  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction mesurable raisonnable, il est nécessaire de pouvoir simuler informatiquement un  $n$ -échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  de même loi que  $X$ , ce qui nécessite un nombre d'opération de l'ordre de  $O(nd)$ . Le calcul de la moyenne empirique des  $f(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  est du même ordre. Au final, la mise en oeuvre de la méthode de Monte-Carlo implique un nombre de l'ordre de  $O(nd)$  opérations. Si l'on note  $\sigma^2$  la variance  $\sigma^2 := \text{var}(X)$  que l'on supposera finie, l'erreur d'approximation commise dans la méthode de Monte-Carlo est

$$\varepsilon_n := \mathbb{E}[f(X)] - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i).$$

En vertu du théorème limite central, si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une réalisation de  $(X_1, \dots, X_n)$ , l'intervalle ci-dessous est un intervalle de confiance (asymptotique) de niveau 95% pour  $\mathbb{E}[f(X)]$

$$\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) - \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) + \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

La vitesse de convergence de l'algorithme est donc de l'ordre de  $\sqrt{n}/\sigma$  pour un coût de  $O(nd)$  opérations. Cela signifie que pour un algorithme comptant  $n$  opérations élémentaires, la précision est de l'ordre de  $\sigma\sqrt{d/n}$  ce qui implique que

1. la méthode de Monte-Carlo est sans intérêt (si ce n'est pédagogique) pour le calcul d'intégrales en petite dimension ou pour le calcul d'intégrales de fonctions régulières.
2. il est crucial de minimiser la variance  $\sigma$ . Si l'intégrale  $\mathbb{E}[f(X)]$  admet plusieurs représentations de type  $\mathbb{E}[g(Y)]$ , on aura tout intérêt à choisir celle qui est associée à la variance minimale.

La variance  $\sigma^2$  est naturellement donnée par  $\sigma^2 = \mathbb{E}[f^2(X)] - \mathbb{E}[f(X)]^2$ . L'objectif étant de déterminer une estimation de  $\mathbb{E}[f(X)]$ , quantité supposée inconnue, il paraît vraisemblable que le calcul explicite de la variance soit, dans les cas pertinents, impossible. La stratégie est alors de remplacer la variance théorique par son estimateur empirique (sans biais)

$$\sigma_n^2 := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( f(X_k) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \right)^2.$$

D'après le lemme de Slutsky, si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une réalisation de  $(X_1, \dots, X_n)$ , alors

$$\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) - \frac{1.96 \sigma_n}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) + \frac{1.96 \sigma_n}{\sqrt{n}} \right].$$

est encore un intervalle asymptotique au niveau 95% de  $\mathbb{E}[f(X)]$ .

**Exercice 3** À l'aide de la méthode de Monte-Carlo, écrire un programme qui

1. calcule une approximation de l'intégrale  $I = \int_{\mathbb{R}} \cosh(x) e^{-x^2} dx$ ,
2. calcule l'estimateur empirique de la variance associé,
3. trace sur le même graphique l'estimateur et l'intervalle de confiance associé en fonction du nombre de données.

### 3 Réduction de la variance

Comme on l'a vu plus haut, plus la variance  $\sigma^2$  est faible, meilleure est l'approximation obtenue par la méthode de Monte-Carlo. Diverses méthodes ont été proposées pour réduire cette variance. En voici quelques unes, que nous allons mettre en pratique dans les exercices sur l'exemple suivant, qui sera notre fil conducteur, et dont les motivations sont données à la section 4. On se donne une variable  $X$  de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  et l'on souhaite donner une approximation de l'intégrale/espérance  $C := \mathbb{E}[(e^X - 1)_+]$ .

#### 3.1 Échantillonnage préférentiel

On souhaite calculer une intégrale du type

$$I = \int f(x)g(x)dx,$$

où  $g$  est une densité de probabilité. La méthode de Monte-Carlo "naïve" consiste à approcher  $I$  par

$$I_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i)$$

où les variables  $X_i$  sont i.i.d. de densité  $g$ . Soit  $h$  une autre densité de probabilité supposée strictement positive. On peut alors écrire

$$I = \int \frac{f(x)g(x)}{h(x)}h(x)dx,$$

ce qui suggère l'approximation

$$J_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(Y_i)g(Y_i)}{h(Y_i)},$$

où cette fois, les variables  $Y_i$  sont de densité  $h$ . Il y a gain de variance si

$$\text{var} \left( \frac{f(Y_1)g(Y_1)}{h(Y_1)} \right) \leq \text{var} (f(X_1)),$$

ou encore

$$\int \left( \frac{f(x)g(x)}{h(x)} \right)^2 h(x)dx \leq \int f(x)^2 g(x)dx.$$

On doit donc choisir  $h$  de sorte que, d'une part, les variables  $Y_i$  soient faciles à simuler, et d'autre part, que l'inégalité ci-dessus soit satisfaite. Une méthode possible pour cela consiste à choisir  $h$  "proche" de la fonction  $fg$  de sorte que la variance (sous  $h$ ) soit faible, puis de normaliser  $h$  pour en faire une densité.

**Exercice 4** On souhaite donner une approximation de

$$C := \mathbb{E}[(e^X - 1)_+] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (e^x - 1)_+ e^{-x^2/2} dx.$$

On note que pour  $x$  proche de zéro, on a  $e^x - 1 \approx x$  ce qui motive le calcul suivant

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^x - 1}{x} x e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sqrt{2y}} - 1}{\sqrt{2y}} e^{-y} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{E} \left[ \frac{e^{\sqrt{2Y}} - 1}{\sqrt{2Y}} \right]$$

où  $Y$  suit une loi exponentielle  $\mathcal{E}(1)$ . Estimer  $C$  par la méthode de Monte-Carlo naïve, puis par la méthode de Monte-Carlo basée sur la représentation en terme de variable exponentielle. Comparer les variances empiriques.

### 3.2 Variable de contrôle

On souhaite toujours approcher une intégrale du type  $I = \mathbb{E}[f(X)]$ . Supposons que l'on sache calculer explicitement une intégrale du même type, disons  $\mathbb{E}[h(X)]$  pour une certaine fonction  $h$ . On peut alors écrire  $I = \mathbb{E}[f(X) - h(X)] + \mathbb{E}[h(X)]$  et on aura un gain de variance dès que  $\text{var}(f(X) - h(X)) \leq \text{var}(f(X))$ .

**Exercice 5** On revient sur le calcul approché de  $C = \mathbb{E}[(e^X - 1)_+]$  où  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . On introduit la quantité  $P := \mathbb{E}[(1 - e^X)_+]$  et on remarque que  $C - P = \mathbb{E}[e^X - 1] = e^{1/2} - 1$ , de sorte que  $C = P + \sqrt{2} - 1$ . Estimer  $C$  via  $P$  par la méthode de Monte-Carlo. Comparer les variances par rapport aux approximations précédentes.

### 3.3 Symétrisation

On souhaite encore et toujours donner une valeur approchée d'une intégrale/espérance du type  $I = \mathbb{E}[f(X)]$ . Supposons que pour une certaine transformation  $T$ , les variables  $X$  et  $T(X)$  aient même loi. On peut alors écrire

$$I = \frac{\mathbb{E}[f(X)] + \mathbb{E}[f(T(X))]}{2},$$

et l'approcher, via la méthode de Monte-Carlo par

$$I_n = \sum_{i=1}^n \frac{f(X_i) + f(T(X_i))}{2}.$$

Le calcul de la variance donne alors

$$\begin{aligned} \text{var}\left(\frac{f(X_1) + f(T(X_1))}{2}\right) &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{f(X_1) + f(T(X_1))}{2}\right)^2\right] - I^2 \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{E}[f(X_1)^2] + \mathbb{E}[f(X_1)f(T(X_1))]) - I^2 \\ &\stackrel{CS}{\leq} \frac{1}{2} (\mathbb{E}[f(X_1)^2] + \mathbb{E}[f(X_1)^2]) - I^2 \\ &= \text{var}(f(X_1)). \end{aligned}$$

Il y donc toujours un gain de variance.

**Exercice 6** Si  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , alors  $-X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et l'on peut donc écrire

$$C = \mathbb{E}[(e^X - 1)_+] = \frac{\mathbb{E}[(e^X - 1)_+] + \mathbb{E}[(e^{-X} - 1)_+] }{2},$$

Estimer  $C$  par la méthode de Monte-Carlo basée sur cette dernière écriture et comparer avec les approximations précédentes.

## 4 Option d'achat et de vente

Dans cette dernière section, nous revenons sur l'exemple qui nous a servi de fil conducteur dans la section précédente, à savoir le calcul de l'intégrale  $C = \mathbb{E}[(e^X - 1)_+]$ . Nous tâchons d'expliquer pourquoi le calcul d'une telle quantité est naturel et important dans la pratique.

Supposons que vous êtes un fabricant de biscuits à l'épeautre. Vous achetez vos matières premières, en particulier la farine d'épeautre tous les mois. Les prix de ces matières premières varient quotidiennement, du fait de l'offre et de la demande et des spéculateurs. Dans six mois, vous savez que vous aurez besoin de dix tonnes de farine. Le cours actuel est de 2500 euros la tonne. Dans six mois, selon la demande, la météo etc., ce cours pourra être encore de 2500 euros la tonne, il pourra avoir baissé à 2000 euros ou au contraire il pourra avoir flambé jusqu'à 3000 euros. Ces variations auront naturellement un impact fort sur votre trésorerie au moment de l'achat.

Pour se prémunir d'une éventuelle flambée des prix, vous pouvez émettre une option d'achat, aussi appelé un "call", auprès d'un vendeur de céréales. Cela consiste à payer un montant  $C$  (convenu à l'avance entre vendeur et acheteur), pour qu'à une date fixée  $T$  (ici dans six mois), vous puissiez exercer votre droit d'acheter ou non la marchandise au vendeur avec qui vous souscrivez le contrat, à un prix  $K$  lui aussi fixé à l'avance, et ce quelque soit le cours de la tonne de farine à l'instant  $T$ . Comment fixer la valeur d'une telle option d'achat ?

Observons votre gain/perte selon le cours de la farine au temps final  $T$ . Soit  $(X_t)$  le cours (aléatoire) de la farine d'épeautre à l'instant  $0 \leq t \leq T$ . Si  $X_T \geq K$ , vous exercez votre droit i.e. vous achetez l'action au vendeur au prix  $K$  et vous gagnez ainsi  $X_T - K - C = (X_T - K)_+ - C$ . En revanche, si  $X_T < K$ , vous n'exercez pas votre droit et n'achetez pas l'action à ce vendeur et votre gain/perte est  $-C = (X_T - K)_+ - C$ . En moyenne (selon les aléas), votre gain au cours de la transaction avec ce vendeur sera donc de

$$\mathbb{E}[(X_T - K)_+] - C.$$

Pour que le jeu soit équitable entre acheteur et vendeur, il faut donc que le prix  $C$  de l'option d'achat soit tel que

$$C = \mathbb{E}[(X_T - K)_+].$$

On peut naturellement jouer au même jeu avec le point de vue du vendeur qui veut se prémunir d'une baisse importante du cours d'une action, auquel cas l'option de vente aussi appelée "put" est donnée par  $P = \mathbb{E}[(K - X_T)_+]$ .

Dans la réalité, on ne connaît bien sûr pas la loi de la variable  $X_T$ , i.e. dans notre exemple, le cours de l'action de farine d'épeautre dans six mois. L'un des objets principaux des mathématiques financières consiste précisément à modéliser l'évolution  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  du cours d'une action au cours du temps. Pour des modèles simplistes, on peut calculer explicitement le prix  $C$  de l'option d'achat. En revanche, dans des modèles un tant soit peu réalistes d'évolution des cours, la loi de  $X_T$  reste inconnue, et l'on recourt alors à la méthode de Monte-Carlo pour estimer le coût de cette option.